Felsőbb Matematika ML vizsga (1) 2021 ősz

NÉV⋆ NEPTUN KÓD⋆ | | | | | | |

Az összes feladatban: jelölje ×-el a helyesnek gondolt választ. Minden feladatban minden jó válasz 1, minden rossz válasz −0.5 pontot ér. 0 pontot ér, ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, vagy mindkettőt megjelöli.

1. Tekintsük $Form_{\{p,q,r\}}$

$$\Sigma = \{\neg p \wedge r, q \vee r\} \qquad \Gamma = \{p \wedge q, p \to \neg r\}$$

részhalmazait.

Melyek igazak az alábbi állítások közül?

	I	H
Σ kielégíthető		
Σ teljes		
Γ kielégíthető		
Γ teljes		
$\Sigma \cup \Gamma$ teljes		

Megoldás. Σ-nak két modellje van, mert r igaz, p hamis, de q bármi lehet Σ egy modelljében. Tehát Σ kielégíthető, de nem teljes.

Γ-nak pontosan egy modellje van: az, amiben p, q igazak és r hamis. Tehát Γ kielégíthető és teljes.

$\Sigma \cup \Gamma$ kielégíthetetlen, mert $\mathcal{M} \models \Sigma$-ból $\mathcal{M}(r) = 1$, $\mathcal{M} \models \Gamma$-ból $\mathcal{M}(r) = 0$ következik. Tehát $\Sigma \cup \Gamma$ teljes.

	I	H
Σ kielégíthető	×	
Σ teljes		×
Γ kielégíthető	×	
Γ teljes	×	
$\Sigma \cup \Gamma$ teljes	×	

2. Legyen Σ elsőrendű formulák következő halmaza

$$\{\, \forall x \forall y \exists z (z \neq x \wedge z \neq y), \quad \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)), \quad \forall x (Q(x) \to P(x)) \,\}$$

Melyek igazak az alábbi állítások közül?

	I	H
Σ konzisztens		
Σ minden modellje legalább 3-elemű		
$\Sigma \cup \{\neg \exists x Q(x)\}$ kielégíthetetlen		
$\Sigma \models \forall x \forall y ((Q(x) \wedge Q(y)) \to x = y) \to \exists x \exists y (x \neq y \wedge \neg Q(x) \wedge \neg Q(y))$		
$\Sigma \models \forall x (P(x) \vee Q(x))$		

Megoldás. A Σ-beli első formula miatt Σ minden modellje legalább 3-elemű, és a másik kettő miatt $\mathcal{M} \models \Sigma$-ből $Q^{\mathcal{M}} \subsetneq P^{\mathcal{M}}$ következik. Σ-nak van modellje (tehát a teljességi tétel miatt konzisztens), pl. ez: $M = \{1, 2, 3\}$, $P^{\mathcal{M}} = \{1, 2\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$.

Következésképp az első két állítás igaz. És a harmadik hamis, mert $\neg \exists x Q(x)$ igaz Σ imént megadott modelljében. Az utolsó szintén hamis, mert $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ hamis ugyanebben a modellben.

Végül, a negyedik állítás igaz, mert az azt mondja, hogy ha $Q^{\mathcal{M}}$ legfeljebb egyelemű, akkor legalább két elem van rajta kívül, és ez igaz ha $\mathcal{M} \models \Sigma$, mert annak minden modellje legalább 3-elemű.

	I	H
Σ konzisztens	$\times$	
Σ minden modellje legalább 3-elemű	$\times$	
$\Sigma \cup \{\neg\exists x Q(x)\}$ kielégíthetetlen		$\times$
$\Sigma \models \forall x \forall y((Q(x) \wedge Q(y)) \to x = y) \to \exists x \exists y(x \neq y \wedge \neg Q(x) \wedge \neg Q(y))$	$\times$	
$\Sigma \models \forall x(P(x) \vee Q(x))$		$\times$

3. Tartalmazza az $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv a binér S relációjelet. $S(x, y)$ jelentése: „x szereti y-t”.

Az alábbi $\mathcal{L}$-formulák közül melyek a „Nincs olyan, aki ne szeretné mindazokat akik szeretik őt.” mondat formalizált változatai?

	igen	nem
$\neg\exists x \exists y(S(x, y) \wedge \neg S(y, x))$		
$\forall x \forall y(S(x, y) \to S(y, x))$		
$\neg\exists x \exists y(\neg S(x, y) \vee S(y, x))$		
$\neg\exists x \exists y(S(x, y) \to S(y, x))$		
$\forall x \forall y(S(x, y) \wedge S(y, x))$		

Megoldás. Az első a mondat direkt fordítása, és ekvivalens a másodikkal („Mindenki szereti azokat, akik szeretik őt”), mert $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x \neg\varphi$ és $\neg(p \wedge \neg q) \equiv p \to q$. Valójában mindkettő azt mondja, hogy S szimmetrikus reláció.

A maradék három nem ekvivalens a mondattal: ezt mutatja az az $\mathcal{M}$ modell, amelynek univerzuma $\{1, 2\}$, és amelyben $L^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Ebben a modellben igaz a mondat, de:

- $\mathcal{M} \not\models \neg\exists x \exists y(\neg S(x, y) \vee S(y, x))$ mert $\mathcal{M} \models \exists x \exists y(\neg S(x, y) \vee S(y, x))$, mert $\mathcal{M} \models \neg S(x, y) \vee S(y, x)[1, 2]$ (vagy mert $\mathcal{M} \models \neg S(x, y) \vee S(y, x)[1, 1]$).
- A harmadik és negyedik ekvivalensek, mert $\neg p \vee q \equiv p \to q$, tehát a negyedik szintén nem ekvivalens a mondattal.
- Az ötödik sem igaz $\mathcal{M}$-ben, mert pl. $\mathcal{M} \not\models S(y, x)[1, 1]$.

	igen	nem
$\neg\exists x \exists y(S(x, y) \wedge \neg S(y, x))$	$\times$	
$\forall x \forall y(S(x, y) \to S(y, x))$	$\times$	
$\neg\exists x \exists y(\neg S(x, y) \vee S(y, x))$		$\times$
$\neg\exists x \exists y(S(x, y) \to S(y, x))$		$\times$
$\forall x \forall y(S(x, y) \wedge S(y, x))$		$\times$

4. Legyen $\mathcal{F}$ a $\langle\{0, 1, 2, 3, 4\}, R\rangle$ frame, ahol $xRy \iff y = x + 1 \pmod 5$ (azaz $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 0)\}$). Legyen $\mathcal{M}$ a $\langle\mathcal{F}, v\rangle$ modell, ahol $v(p) = \{0\}$. (Emlékeztető: az unér konnektívumok erősebben kötnek mint a binérek.)

Melyek igazak az alábbi állítások közül? (φ tetszőleges modális formula.)

	I	H
$\mathcal{F} \models \Diamond\varphi \to \Box\varphi$		
$\mathcal{M} \models \Box\Diamond p \to \Diamond p$		
$\mathcal{M} \models \Box p \to \neg p$		
$\mathcal{M} \models \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$		
$\mathcal{M} \models \Diamond(\neg p \wedge \Diamond p)$		

Megoldás. Az első igaz, mert minden állapot csak egy állapotot lát, tehát ha van olyan szomszédja, amelyben φ igaz, akkor minden szomszédja ilyen.

A második hamis, mert $\mathcal{M} \models_3 \Box\Diamond p$ de $\mathcal{M} \not\models_3 \Diamond p$

A harmadik igaz, mert $\mathcal{M} \models_x \Box p$ pontosan akkor, ha $x = 4$, de $\mathcal{M} \not\models_4 p$.

A negyedik is igaz mert $\mathcal{M} \models_x \Diamond p$ pontosan akkor, ha $x = 4$; és $\mathcal{M} \models_4 \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$, mert $\mathcal{M} \models_0 p \wedge \Box\neg p$.

Az utolsó hamis, mert $\mathcal{M} \models_x \Diamond(\neg p \wedge \Diamond p)$ csak akkor, ha $x = 3$.

	I	H
$\mathcal{F} \models \Diamond\varphi \to \Box\varphi$	$\times$	
$\mathcal{M} \models \Box\Diamond p \to \Diamond p$		$\times$
$\mathcal{M} \models \Box p \to \neg p$	$\times$	
$\mathcal{M} \models \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$	$\times$	
$\mathcal{M} \models \Diamond(\neg p \wedge \Diamond p)$		$\times$