Felsőbb matematika vizsga – 2014-01-07

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az xy-síkot $\pi/2$ szöggel elforgatja és a $(3, 2, 1)$ vektort a -1-szeresébe viszi. *(2 pont)*

2. Az alábbi négyzetes mátrixok közül melyik lehet szinguláris? *(a)* $\mathbf{A}$ szinguláris értékei $\sigma_{1,2} = 2$, $\sigma_3 = 0$, *(b)* $\mathbf{B}$ 4 sajátértéke $\pm i$, $\pm\sqrt{3}$, *(c)* $\mathbf{C}$ domináns főátlójú, *(d)* $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$, ahol $\mathbf{X}$ nem négyzetes teljes oszloprangú, *(e)* $\mathbf{E} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$, ahol $\mathbf{X}$ nem négyzetes teljes sorrangú mátrix. *(2 pont)*

3. Mit értünk egy valós és mit egy komplex négyzetes mátrix Schur-felbontásán? *(2 pont)*

4. Írjuk fel az $\cos \mathbf{J}$ mátrixot, ha *(2 pont)*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

5. Mit tudunk egy valós $\mathbf{A}$ mátrix főminorairól, ha $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, és mit tudunk vezető főminorairól, ha $\mathbf{A}$ negatív definit? *(2 pont)*

6. Householder-tükrözéssel határozzuk meg azt a $\mathbf{H}$ mátrixot, mely az $(1, 2, 2)$ vektort olyan vektorba viszi, melynek az első koordinátáját kivéve minden koordinátája 0. *(2 pont)*

7. Mondjuk ki a Perron–Frobenius-tétel erősebb alakját (nemnegatív elemű mátrixokra). *(2 pont)*

8. Röviden igazoljuk, hogy ha **A** szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor sajátértékei és szinguláris értékei megegyeznek. *(3 pont)*

9. Igazoljuk a szinguláris felbontás létezésére vonatkozó tételt! *(3 pont)*

10. Írjuk le annak bizonyítását, hogy ha **A** normális, akkor unitéren diagonalizálható! *(5 pont)*