Felsőbb matematika vizsga – 2013-01-15

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Legyen adva az $\mathbb{R}$ test fölötti $\mathcal{V}$ vektortér! Mit jelent az, hogy a $\mathcal{V}$ vektortér euklideszi tér?

2. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix *(a)* diagonalizálható (a választ bázisok segítségével fejezzük ki), *(b)* diagonalizálható (a választ a geometriai multiplicitásokkal fejezzük ki), *(c)* ortogonálisan diagonalizálható, *(d)* unitéren diagonalizálható legyen? *(2 pont)*

3. Legyen $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere. Tekintsük azt a lineáris leképezést, mely merőlegesen vetít a $\mathcal{W}$ altérre. Mik a sajátértékei e leképezésnek, és mik a hozzájuk tartozó sajátalterek?

4. Householder-tükrözéssel határozzuk meg azt a $\mathbf{H}$ mátrixot, mely a $(6, 2, 3)$ vektort olyan vektorba viszi, melynek az első koordinátáját kivéve minden koordinátája 0. *(2 pont)*

5. Határozzuk meg az$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 1-, 2-, ∞- és Frobenius-normáját! *(2 pont)*

6. Hogyan kapjuk meg az $\left\{ \begin{array}{c} 6x + 3y = 8 \\ 2x + 8y = 17/2 \\ 3x + 5y = 11 \end{array} \right\}$ egyenletrendszer optimális, minimális abszolút értékű megoldását az együtthatómátrix QR-felbontásából, ami $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$? Számítsuk is ki!

7. Primitívek-e az alábbi mátrixok? Válaszunkat röviden indokoljuk! *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Adjuk meg az alábbi ellentmondásos egyenletrendszer egy optimális megoldását a megfelelő pszeudoinverz kiszámításával! *(3 pont)*

$$\begin{aligned} x + 2y &= 15 \\ 2x + 4y &= 5 \end{aligned}$$

9. Mondjuk ki a Perron–Frobenius-tétel erősebb alakját (nemnegatív elemű mátrixokra). *(4 pont)*

10. Igazoljuk, hogy egy megoldható lineáris egyenletrendszer sortérbe eső megoldása minimális abszolút értékű. *(3 pont)*

11. Bizonyítsuk be, hogy minden valós mátrixnak léteznek szinguláris értékei! *(4 pont)*