Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok – pontozási útmutató
2025. április 28.

Általános alapelvek:

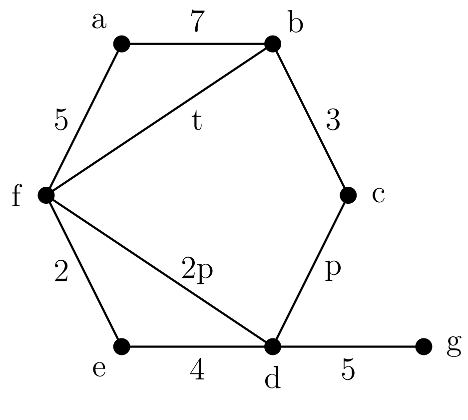
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.
Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).
Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).
Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. a) Tekintsük a 2. feladat melletti gráfot. (Az élek súlyozását hagyjuk figyelmen kívül.) Futtassuk le rá a minimális lefogó ponthalmaz keresésére tanultak közül az 1. approximációs algoritmust.

b) Létezik-e olyan kimenete a minimális lefogó ponthalmaz keresésére tanult 2. approximációs algoritmusnak, amely az előző pontban kapott megoldásnál jobban közelíti az optimális megoldást?

Az 1. feladat megoldása: (a) Az algoritmus először megkeres egy maximális párosítást. (1 pont)
Könnyen található 3 élű párosítás, pl. az $\{ab, cd, ef\}$ (1 pont)
ennél nagyobb nem létezhet, ahhoz legalább 8 csúcs kellene. (2 pont)
Az algoritmus kimenete a párosításbeli élek végpontjainak halmaza, összesen 6 db pont. A választott éleinkre nézve ez az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz. (2 pont)
(b) A második algoritmus egy tetszőleges, nem bővíthető párosítást keres, és a kimenet az ebben szereplő élek végpontjainak halmaza. (2 pont)
A kérdés tehát, mivel minimalizálni szeretnénk, azzal ekvivalens, hogy van-e a gráfban 3-nál kevesebb élű, tovább nem bővíthető párosítás. (2 pont)
Ilyet lehet is találni, pl. az $\{ab, de\}$, az ehhez tartozó lefogó ponthalmaz az $\{a, b, d, e\}$. Tehát a válasz igen. (2 pont)

2. Tekintsük a jobbra látható élsúlyozott gráfot, amely a minimális súlyú Steiner-fa probléma egy bemenete. Tudjuk, hogy minden él súlya egy pozitív egész szám, és a terminálok halmaza az $\{a, b, d\}$ halmaz. Miután lefuttattuk rá a Steiner-fa problémára tanult 2-approximációs algoritmust, azt vettük észre, hogy ennek egyetlen lehetséges kimenete van, és az az alábbi éleket tartalmazza: af, bf, bc, dc. Adjuk meg a p és t paramétereket lehetséges értékeit, és írjuk le az algoritmus futását a kapott súlyozásra nézve!



A 2. feladat megoldása: A bemenet nem metrikus, ezért először metrizálni kell.

A: Ehhez a pontpárok közötti legrövidebb utak hosszát kell meghatározni, de ezt elég a terminálpontokra megtenni.
B: Ezután a terminálpontokon értelmezett metrizált teljes gráfban kell egy minimális feszítőfát keresni.
C: Vesszük ezen feszítőfa éleinek az eredeti gráfban megfelelő utak unióját.
D: Amennyiben ez a részgráf nem körmentes, ebben az esetben még egy minimális feszítőfát kell benne keresni. Ez a kimenet.
Mivel a terminálok halmaza háromelemű, ezért a B potban keresett minimális feszítőfának két éle van. Azt a két élet kell a metrizált gráfban választani, amelyek az a, b, d csúcsok közötti 3 lehetséges él közül a két legkisebb súlyú.
Vizsgáljuk meg a bc és cd éleket! Ezek vagy azért kerültek be a kimenetbe, mert ez a két él egy legrövidebb $b \sim d$ utat alkot, vagy pedig egy $a \sim d$ legrövidebb úton vannak. ($b \sim a$ legrövidebb úton nem lehetnek, hiszen az utat folytatva a-ba csak az 5 súlyú fa élen érkezhetnénk meg, tehát minden ilyen út hossza 8-nál nagyobb lenne, közben az ab súlya csak 7.)
Ha egy $a \sim d$ legrövidebb úton vannak, akkor az az út átmegy a b-n. Vagyis van nála rövidebb $a \sim b$ és $b \sim d$ út is, tehát az algoritmus az ab és bd éleket választotta a metrizált gráfban, ami ellentmond a feltevésünknek.
Tehát bc és cd egy legrövidebb $b \sim d$ utat alkot, és ezért kerültek be a kimenetbe.
Ezen kívül még az ab él került be, hiszen a és b távolsága $\min\{7; 5 + t\}$. Ennél szigorúan rövidebb $a \sim d$ út nincs, ha pedig egyenlőség lenne, akkor az algoritmus kimenete nem lenne egyértelmű.
Tehát a B lépésben az ab és bd éleket választotta az algoritmus. (2 pont)
Ezért az egyetlen legrövidebb $a \sim b$ út az af, fb élekből áll. (1 pont)
Ez rövidebb, mint az ab él $\Rightarrow t = 1$. (1 pont)
Valamint a legrövidebb $b \sim d$ út a bc és cd élekből áll. (1 pont)
Ez rövidebb, mint a 7 hosszú $bfed$ út $\Rightarrow p \leq 3$. (1 pont)
Az $1 + 2p$ hosszú bfd útnál is rövidebb $\Rightarrow p \geq 3$. (1 pont)
Tehát csak a $t = 1$, $p = 3$ a megoldás.
Az algoritmus futása:
A $t = 1$ és $p = 3$ értékek mellett metrizáljuk a gráfot, amit elég a terminálpárokra megtenni. (1 pont)
Az ab súlya 6, az ad súlya 11, a bd súlya 6 lesz. (1 pont)
A terminálok teljes részgráfjának minimális feszítőfája az ab, bd élekből áll. (1 pont)
Ezen élek rendre az afb, bcd utaknak felelnek meg. (1 pont)
Ezen utak egyesítése az af, bf, bc, dc éleket tartalmazza. Mivel ez a részgráf körmentes, ez az algoritmus kimenete. (1 pont)

3. Tekintsük az {`a,b,d,e,f,g,i,l,m,n,o,p,r,s,u,v,z`} betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

`paris (3), riga (3), rome (3), bern (4), berlin (5),`
`zagreb (5), dublin (6), vaduz (6), sofia (8).`

Hajtsuk végre ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló, előadáson tanult közelítő algoritmust.

A 3. feladat megoldása: Az algoritmus egyszerre mindig egy halmazt választ ki. A következő kiválasztott halmaz mindig az lesz, amelyre a halmaz súlyának és a benne lévő, még más halmazok által le nem fedett elemek számának a hányadosa minimális. Egyetlen lehetséges sorrendben lehet a halmazokat beválogatni, ez az alábbi:
Az első választott halmaz a `paris`, egy új lefedett elem költsége $\frac{3}{5}$. (2 pont)
Az második választott halmaz a `rome`, egy új lefedett elem költsége 1. (2 pont)
Az következő választott halmaz a `dublin`, egy új lefedett elem költsége $\frac{6}{5}$. (2 pont)
Az következő választott halmaz a `zagreb`, egy új lefedett elem költsége $\frac{5}{2}$. (2 pont)
Az következő választott halmaz a `vaduz`, egy új lefedett elem költsége 6. (2 pont)

Az utolsó választott halmaz a `sofia`, egy új lefedett elem költsége 8. (2 pont)
A kapott fedés tehát: {`paris`, `rome`, `dublin`, `zagreb`, `vaduz`, `sofia`}, költsége 31.

4. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

$$\max\{7x_1+8x_2+8x_3+6x_4\}$$
ha
$$\begin{aligned} 5x_1+2x_2+3x_4 &\le 3\\ x_2+2x_3+x_4 &\le 3\\ 2x_1+4x_2+4x_3+x_4 &\le 4 \end{aligned}$$

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán és ha a válasz igen, határozzuk meg a feladat maximumértékét.

A 4. feladat megoldása a) A dualitástétel mátrixos alakjában szereplő primál feladat a $\max\{cx : Ax \le b\}$.
A feladatban a megfelelő mátrix és vektorok:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3\\ 3\\ 4 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$ (1 pont)
A duális program a $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakú. (1 pont)
Ezeket a fentiekkel felírva kapjuk:
$$\min\{3y_1+3y_2+4y_3\}$$
ha
$$\begin{aligned} 5y_1+2y_3 &= 7\\ 2y_1+y_2+4y_3 &= 8\\ 2y_2+4y_3 &= 8\\ 3y_1+y_2+y_3 &= 6\\ y_1,y_2,y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$ (2 pont)
A harmadik egyenletet a másodikból kivonva kapjuk, hogy $2y_1 = y_2$. (1 pont)
Ezt az utolsó egyenletbe behelyettesítve $y_3 = 6-5y_1$. (1 pont)
Az első egyenletbe behelyettesítve $5y_1+2y_3 = 5y_1+12-10y_1 = 12-5y_1 = 7$, vagyis $y_1 = 1$. (1 pont)
Ebből $y_2 = 2$, $y_3 = 1$. (0 pont)
Ez az összes feltételt teljesíti, tehát a duális megoldható. Ez azzal ekvivalens, hogy a primál feladat felülről korlátos. (2 pont)
A dualitástétel szerint amennyiben mindkettő megoldható, a primál feladat maximuma egyenlő a duális feladat minimumával. (1 pont)
A primál feladat is megoldható, pl. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ megoldás. (1 pont)
A duálisnak egyetlen megoldása van, tehát a minimuma az ennek a célfüggvénybe való behelyettesítési értéke, vagyis 13. (1 pont)
Ez a primál feladat maximuma is.

5. Tekintsük ismét a 2. feladat melletti gráfot. (Az élek súlyozását hagyjuk figyelmen kívül.) Az alábbi táblázat a gráf minden v csúcsára megadja a hozzá tartozó $w(v)$ súlyt:

v	a	b	c	d	e	f	g
$w(v)$	6	2	7	5	13	9	4

Feladatunk egy egészértékű programozási feladat megadása az alábbi problémára: keressünk egy maximális összsúlyú független ponthalmazt az említett gráfban a megadott súlyozásra nézve.
A keresett egészértékű programot *ne* mátrixos alakban adjuk meg. (A szóban forgó független ponthalmazt *nem kell megadni*, azért pont nem jár, a feladat az egészértékű programként való megfogalmazás.)

Az 5. feladat megoldása A célunk egy maximális súlyú független ponthalmaz keresése. A ponthalmaz függetlenségét az egyenlőtlenségekkel, a maximális súlyt pedig a célfüggvénnyel fogjuk megkövetelni. Először nézzük az egyenlőtlenségeket.
Minden csúcsról el kell dönteni, hogy bekerül-e a kérdéses halmazba. Ezt szokás szerint úgy tesszük

meg, hogy a csúcsokhoz rendelünk változókat, és ezekről kikötjük, hogy csak 0 vagy 1 értéket vehetnek fel, ahol a 0 jelentése, hogy nincs a halmazban, az 1 jelentése, hogy benne van. (2 pont)

Tehát:

A változóink: az a csúcshoz az x_a tartozik,..., az g-hez az x_g. Azaz 7 db változónk van. (1 pont)

$0 \leq x_a \leq 1, \ldots, 0 \leq x_g \leq 1$ (1 pont)

Minden változó egészértékű. (1 pont)

Most azt kell megfogalmazni, hogy a ponthalmaz független. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy minden élre teljesül, hogy a végpontjai közül legfeljebb egyet választunk ki. Az alábbi (9 db) egyenlőtlenség írja le ezt: $x_a + x_b \leq 1$, $x_a + x_f \leq 1$, $x_b + x_c \leq 1$, $x_b + x_f \leq 1$, $x_c + x_d \leq 1$, $x_d + x_e \leq 1$, $x_d + x_f \leq 1$, $x_d + x_g \leq 1$, $x_e + x_f \leq 1$. (3 pont)

Megjegyzés: a fenti 9 egyenlőtlenségből és a változók nemnegativitásából következik, hogy minden változó legfeljebb 1, azt nem kell külön kikötni, de meg kell említeni ezt a tulajdonságot, amennyiben ezek külön nem szerepelnek a leírásban.

Eddig azt írtuk le, hogy a ponthalmaz független, bármely független halmazra igazak a fenti egyenlőtlenségek, és amelyikre igaz, az a halmaz tényleg független. (1 pont)

Egy ponthalmaz súlya így írható le $6x_a + 2x_b + 7x_c + 5x_d + 13x_e + 9x_f + 4x_g$. (1 pont)

Ezt kell maximalizálni, vagyis a célfüggvény $\max\{6x_a + 2x_b + 7x_c + 5x_d + 13x_e + 9x_f + 4x_g\}$. (2 pont)

Maga az egészértékű program tehát:

$\max\{6x_a + 2x_b + 7x_c + 5x_d + 13x_e + 9x_f + 4x_g\}$

ha

$$
\begin{aligned}
0 \leq x_a \leq 1, \ldots, 0 \leq x_g \leq 1 \\
x_a.x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g \text{ egész} \\
x_a + x_b \leq 1 \\
x_a + x_f \leq 1 \\
x_b + x_c \leq 1 \\
x_b + x_f \leq 1 \\
x_c + x_d \leq 1 \\
x_d + x_e \leq 1 \\
x_d + x_f \leq 1 \\
x_d + x_g \leq 1 \\
x_e + x_f \leq 1
\end{aligned}
$$