JAVÍTÁSI PÉLDÁNY
CSAK EGÉSZ PONTSZÁM ADHATÓ

Egy diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása a következő:

$x_1[k+1] = x_1[k] – 0,7\ x_2[k] + u[k]$

$x_2[k+1] = a\ x_1[k] - 0,8\ x_2[k] + 2\ u[k]$

$y[k] = - 2\ x_1[k] + 2\ x_2[k]$,

ahol „a" paraméter.

a) Az „a" paraméter mely értékeire aszimptotikusan stabilis a rendszer? (5 pont)

A továbbiakban a = 0,8 értékkel számoljon!

b) Számítsa ki a rendszer válaszát k = - 1-re, k= 0-ra, k = 1-re és k = 2-re, ha a rendszer gerjesztő jele: $u[k] = 5\ \varepsilon[k]\ 2^k$! (4 pont)

c) Számítsa ki a rendszer impulzusválaszának formuláját! (6 pont)

d) Számítsa ki a rendszer válaszának formuláját, ha a gerjesztő jel $u[k] = 5\ \varepsilon[k]\ 2^k$! (5 pont)

---

a) A karakterisztikus polinom: $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -0,7 \\ a & -0,8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0,2\ \lambda - 0,8 + 0,7\ a$ 2 pont

Egyik megoldás (Jury kritérium):

$$\left.\begin{array}{r} P(\lambda=1) = 0,7\ a > 0 \Rightarrow a > 0 \\ P(\lambda=-1) = 0,4 + 0,7\ a > 0 \Rightarrow a > -\frac{4}{7} \\ |0,7\ a - 0,8| < 1 \Rightarrow -1 < 0,7\ a - 0,8 < 1 \Rightarrow -\frac{2}{7} < a < \frac{18}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0 < a < \frac{18}{7} \approx 2,5714}$$ 3 pont

Másik megoldás: $\lambda_{12} = 0,1 \mp \sqrt{0,81 - 0,7\ a}$

1. Ha $a > \frac{81}{70}$, $\lambda_{12} = 0,1 \mp j\ \sqrt{0,7\ a - 0,81}$, $|\lambda_{12}|^2 = 0,01 + 0,7\ a - 0,81 < 1 \Rightarrow a < \frac{18}{7}$.

2. Ha $a \le \frac{81}{70}$, $\lambda_1 = 0,1 + \sqrt{0,81 - 0,7\ a} < 1 \Rightarrow 0,81 – 0,7\ a < 0,81 \Rightarrow 0 < a \le \frac{81}{70}$,

$\lambda_2 = 0,1 - \sqrt{0,81 - 0,7\ a} > - 1 \Rightarrow 1,21 > 0.81 – 0,7\ a \Rightarrow -\frac{4}{7} < a \le \frac{81}{70}$,

$\lambda_1 < 1$ és $\lambda_2 > - 1$ egyszerre teljesül, ha $0 < a \le \frac{81}{70}$, az 1. és 2. feltételt összevetve:

$\boxed{0 < a < \frac{18}{7} \approx 2,5714}$ 3 pont

Csak egy megoldás értékelhető, bármelyikre összesen $\boxed{\text{5 pont}}$ jár.

b)

k	$x_1[k]$	$x_2$fk]	u[k]	y[k]	
- 1	0	0	0	0	
0	0	0	5	0	
1	5	10	10	10	
2	8	16	20	16	$\boxed{\text{4 pont}}$

c) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -0,7 \\ 0,8 & -0,8 \end{bmatrix}$; $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\underline{C}^T = [-2\quad 2]$; D = 0.

A rendszermátrix sajátértékei: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\ \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -0,7 \\ 0,8 & -0,8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 – 0,2\ \lambda - 0,24 = 0.$

$\lambda_1 = 0,6$; $\lambda_2 = - 0,4$ 2 pont

Egyik megoldás: $h[k] = D\ \delta\ [k] + \varepsilon[k-1]\ \underline{C}^T\ \underline{\underline{A}}^{k-1}\ \underline{B}$; $\underline{\underline{A}}^{k-1} = \underline{\underline{L}}_1\ \lambda_1^{k-1} + \underline{\underline{L}}_2\ \lambda_2^{k-1}$

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{1}{0{,}6-(-0{,}4)}\begin{bmatrix} 1-(-0{,}4) & -0{,}7 \\ 0{,}8 & -0{,}8-(-0{,}4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4 & -0{,}7 \\ 0{,}8 & -0{,}4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}}_2 = \frac{1}{-0{,}4-0{,}6}\begin{bmatrix} 1-0{,}6 & -0{,}7 \\ 0{,}8 & -0{,}8-0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}7 \\ -0{,}8 & 1{,}4 \end{bmatrix}$$ 2 pont

$$\underline{C}^T \; \underline{\underline{A}}^{k-1}\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 1{,}4 & -0{,}7 \\ 0{,}8 & -0{,}4 \end{bmatrix} 0{,}6^{k-1} + \begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}7 \\ -0{,}8 & 1{,}4 \end{bmatrix} (-0{,}4)^{k-1}\right\}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} 0{,}6^{k-1} + \begin{bmatrix} -0{,}8 & 1{,}4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (-0{,}4)^{k-1} = 2\,(-0{,}4)^{k-1}$$

$h[k] = \varepsilon[k-1]\; 2\; (-0{,}4)^{k-1}$ 2 pont

Másik megoldás:

$k \geq 1$-re: $h[k] = M_1\, 0{,}6^{k-1} + M_2\, (-0{,}4)^{k-1}$, illesztés $k = 1$-re és $k = 2$-re: 1 pont

k	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$u[k] = \delta[k]$	$y[k] = h[k]$	
0	0	0	1	0	
1	1	2	0	2	
2	- 0,4	- 0,8	0	- 0,8	1 pont

$$\left.\begin{array}{r} k = 1\text{-re}: \;\; h[1] = M_1 + M_2 = 2 \\ k = 2\text{-re}: \;\; h[2] = 0{,}6\,M_1 - 0{,}4\,M_2 = -0{,}8 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1 = 0; \qquad M_2 = 2$$

$h[k] = \varepsilon[k-1]\; 2\; (-0{,}4)^{k-1}$ 2 pont

Csak egy megoldás értékelhető, bármelyikre összesen $\boxed{\text{6 pont}}$ jár.

d) $$y[k] = \varepsilon[k] \sum_{p=0}^{k} u[k-p]\,h[p] = \varepsilon[k] \sum_{p=0}^{k} \varepsilon[k-p]\,5\;\; 2^{k-p}\;\; \varepsilon[p-1]\,2\;\; (-0{,}4)^{p-1} =$$ 2 pont

$$= \varepsilon[k-1] \sum_{p=1}^{k} -25\;\; 2^{k-p}\;\; (-0{,}4)^{p} = \varepsilon[k-1]\,(-25)\;\; 2^k \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{-0{,}4}{2}\right)^{p} =$$

$$= \varepsilon[k-1]\,(-25)\;\; 2^k\,(-0{,}2)\,\frac{(-0{,}2)^k - 1}{-0{,}2-1} = \varepsilon[k-1]\left(-\frac{25}{6}\right) 2^k \left((-0{,}2)^k - 1\right) =$$

$$= -4{,}1667\;\varepsilon[k-1]\left((-0{,}4)^k - 2^k\right) = \varepsilon[k-1]\left(1{,}6667\,(-0{,}4)^{k-1} + 8{,}3333\;\; 2^{k-1}\right)$$

(Az $y[k] = 4{,}4447\;\; \varepsilon[k]\left(2^k - (-0{,}4)^k\right)$ eredmény is jó) 3 pont

Összesen $\boxed{\text{5 pont}}$

---

1. Egy lineáris, invariáns FI rendszer válaszjele az $u(t) = \varepsilon(t)\, e^{-2t}$ gerjesztő jelre $y(t) = 2\,\varepsilon(t)\, t\, e^{-2t}$. Adja meg az $y_1(t)$ válaszjel kifejezését, az $u_1(t) = 4\,\varepsilon(t-4)\;\; e^{-2(t-4)}$ gerjesztő jelre! (2 pont)

   $y_1(t) = 8\,\varepsilon(t-4)\,(t-4)\,e^{-2(t-4)}$ $\boxed{\text{2 pont}}$

2. Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = 5\,\varepsilon[k]\, 0{,}8^k$, bemeneti jele: $u[k] = 10\,\varepsilon[k-5]$. Adja meg a válaszjel értékét $k = 4$-re! (2 pont)

   $y[4] = 0$ $\boxed{\text{2 pont}}$

3 Egy FI rendszer impulzusválasza: $h(t) = A\,\delta(t+1) + B\, t\, \varepsilon(t)\, e^{\alpha t}$ Adja meg a rendszer kauzalitásának feltételét az α, A és a B valós paraméterre! (2 pont)

   $A = 0$, a többi paraméter tetszőleges. $\boxed{\text{2 pont}}$

4. Egy FI rendszer impulzusválasza: $h(t) = 5\,\varepsilon(t)\, e^{-2t}$, gerjesztő jele: a nem belépő $u(t) = 8\, e^{2t}$. Adja meg a rendszer válaszjelét! (2 pont)

   $y(t) = 10\, e^{2t}$ $\boxed{\text{2 pont}}$

5. Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása az alábbi:

   $x'(t) = -2\,x(t) + 3\,u(t)$, $\qquad y(t) = 4\,x(t)$.

Adja meg a rendszer impulzusválaszát a $t = +0$ pillanatban! (2 pont)

   $h(+0) = 12$ $\boxed{\text{2 pont}}$

JAVÍTÁSI PÉLDÁNY
CSAK EGÉSZ PONTSZÁM ADHATÓ

Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása a következő:

$x_1'(t) = a\, x_1(t) + 1{,}5\, x_2(t) + 2\, u(t)$,

$x_2'(t) = 2\, x_1(t) + 2\, a\, x_2(t) - u(t)$,

$y(t) = x_2(t)$,

ahol „a” paraméter.

a) Az „a” paraméter mekkora értékeire aszimptotikusan stabilis a rendszer? (5 pont)

A továbbiakban az a = - 2értékkel számoljon!

b) Adja meg a rendszer válaszának értékét a t = +0 pillanatban és *numerikus közelítő* értékét a t = 0,05 pillanatban, ha a rendszer gerjesztő jele $u(t) = 4\,\varepsilon(t)\,e^{-t}$! (4 pont)

c) Számítsa ki a rendszer válaszának formuláját, ha a gerjesztő jel: $u(t) = 4\,\varepsilon(t)$! (8 pont)

d) Számítsa ki a rendszer válaszát az u(t) = 10 (konstans) gerjesztő jelre! (3 pont)

---

a) A karakterisztikus polinom: $P(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1{,}5 \\ 2 & 2a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3a\lambda + 2a^2 - 3$ 2 pont

Egyik megoldás (Hurwitz kritérium):

$$\left.\begin{aligned} -3a > 0 &\Rightarrow a < 0 \\ 2a^2 - 3 > 0 &\Rightarrow |a| > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a < -\sqrt{1{,}5} \approx -1{,}2474}$$ 3 pont

Másik megoldás: $\lambda_{12} = 1{,}5\,a \mp \sqrt{0{,}25a^2 + 3}$

Két valós gyök lehet csak, és ha $\lambda_1 = 1{,}5\,a + \sqrt{0{,}25a^2+3} < 0$, akkor $\lambda_2 < 0$ is teljesül.

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{0{,}25\,a^2+3} < -1{,}5\,a &\Rightarrow a < 0 \\ 0{,}25\,a^2 + 3 < 2{,}25\,a^2 &\Rightarrow |a| > \sqrt{1{,}5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a < -\sqrt{1{,}5} \approx -1{,}2474}$$ 3 pont

Csak egy megoldás értékelhető, bármelyikre összesen $\boxed{\text{5 pont}}$ jár.

A továbbiakban $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1{,}5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$; $\underline{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\underline{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$; D = 0.

b) $\underline{x}(0) = \underline{0}$, u(0) = 4, $y(0) = \underline{C}^T\,\underline{x}(0) + D\,u(0) = 0$; 1 pont

$$\underline{x}(0{,}05) = \underline{x}(0) + \underline{x}'(0)\ 0{,}05 = \underline{x}(0) + [\underline{\underline{A}}\,\underline{x}(0) + \underline{B}\,u(0)]\ 0{,}05 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$y(0{,}05) = \underline{C}^T\,\underline{x}(0{,}05) + D\,u(0.05) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}2 \end{bmatrix} + 0 = -0{,}2$$ 3 pont

Összesen $\boxed{\text{4 pont}}$

c) A rendszermátrix sajátértékei: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\,\underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1{,}5 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0.$

$\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -5$ 2 pont

Egyik megoldás: $y(t) = \varepsilon(t) \int_0^t u(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$, $h(t) = D\,\delta(t) + \varepsilon(t)\,\underline{C}^T\,e^{\underline{\underline{A}}t}\,\underline{B}$,

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \underline{\underline{L}}_1\,e^{\lambda_1 t} + \underline{\underline{L}}_2\,e^{\lambda_2 t}, \quad \underline{\underline{L}}_1 = \frac{1}{-1-(-5)} \begin{bmatrix} -2-(-5) & 1{,}5 \\ 2 & -4-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}375 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{L}}_2 = \frac{1}{-5-(-1)} \begin{bmatrix} -2-(-1) & 1{,}5 \\ 2 & -4-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & -0{,}375 \\ -0{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix},$$ 2 pont

$$h(t) = \varepsilon(t)\left\{[0 \quad 1]\begin{bmatrix}0,75 & 0,375\\ 0,5 & 0,25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}e^{-t} + [0 \quad 1]\begin{bmatrix}0,25 & -0,375\\ -0,5 & 0,75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}e^{-5t}\right\} =$$

$$=\varepsilon(t)\left\{[0,5 \quad 0,25]\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}e^{-t} + [-0,5 \quad 0,75]\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}e^{-5t}\right\} = \varepsilon(t)\left(0,75\,e^{-t} - 1,75\,e^{-5t}\right)$$ 2 pont

$$y(t) = \varepsilon(t)\int_0^t 4\left(0,75\,e^{-\tau} - 1,75\,e^{-5\tau}\right)d\tau = \varepsilon(t)\left(1,6 - 3\,e^{-t} + 1,4\,e^{-5t}\right)$$ 2 pont

Másik megoldás: A rendszermátrix saját vektorát $\underline{m} = \begin{bmatrix}m_a\\ m_b\end{bmatrix}$-vel jelölve:

$(-2-\lambda)\, m_a + 1,5\, m_b = 0$. Legyen $m_b = 1$,ekkor $m_a = \dfrac{1,5}{2+\lambda}$, $\lambda_1 = 1, \Rightarrow \underline{m}_1 = \begin{bmatrix}1,5\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -5, \Rightarrow \underline{m}_2 = \begin{bmatrix}-0,5\\ 1\end{bmatrix}$, $\underline{x}_f(t) = M_1\begin{bmatrix}1,5\\ 1\end{bmatrix}e^{-t} + M_2\begin{bmatrix}-0,5\\ 1\end{bmatrix}s^{-5t}$ 2 pont

$\underline{x}_g(t) = \begin{bmatrix}X_{1g}\\ X_{2g}\end{bmatrix}$, $\left.\begin{matrix}0 = -2\,X_{1g} + 1,5\,X_{2g} + 8\\ 0 = 2\,X_{1g} - 4\,X_{2g} - 4\end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x}_g(t) = \begin{bmatrix}5,2\\ 1,6\end{bmatrix}$

$\underline{x}(t) = \underline{x}_f(t) + \underline{x}_g(t) = M_1\begin{bmatrix}1,5\\ 1\end{bmatrix}e^{-t} + M_2\begin{bmatrix}-0,5\\ 1\end{bmatrix}s^{-5t} + \begin{bmatrix}5,2\\ 1,6\end{bmatrix}$, 2 pont

az $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ kezdeti feltételből $M_1 = -3$, $M_2 = 1,4$, $y(t) = x_2(t) = \varepsilon(t)\left(1,6 - 3\,e^{-t} + 1,4\,e^{-5t}\right)$

2 pont

Csak egy megoldás értékelhető, bármelyikre összesen $\boxed{\text{6 pont}}$ jár.

d) Egyik megoldás: $y(t) = \int_0^\infty u(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty 10\left(0,75\,e^{-\tau} - 1,75\,e^{-5\tau}\right)d\tau = = 4$

Másik megoldás: Minthogy a gerjesztés az előző pont gerjesztése t>0-ra állandó összetevőjének 2,5-szerese,a rendszer linearitása miatt y(t) = 2,5 * 1,6 = 4.
Csak egy megoldás értékelhető, bármelyikre $\boxed{\text{3 pont}}$ jár.

---

1. Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = 25\,\varepsilon[k]\,0,2^k$, gerjesztő jele $u[k] = 8\,\varepsilon[k]\,0,5^k$. Számítsa ki a válaszjel értékét k = 2-re! (2 pont)

   y[2] = 78 $\boxed{\text{2 pont}}$

2. A lineáris, invariáns DI rendszer válaszjele az u[k] gerjesztő jelre y[k]. Ennek felhasználásával adja meg az $y_1[k]$ válaszjel kifejezését, ha a gerjesztő jel $u_1[k] = 5\,u[k-1]$! (2 pont)

   $y_1[k] = 5\,y[k-1]$ $\boxed{\text{2 pont}}$

3 Egy DI rendszer impulzusválaszának kifejezése $h[k] = \varepsilon[k]\left(A\,\alpha^k + B\,\beta^k\right)$. Adja meg a valós A, α, B és β paraméterekre a rendszer GV stabilitásának feltételét! (2 pont)

$|\alpha|<1$ és $|\beta|<1$, (1 pont), vagy $|\alpha|<1$, B = 0 vagy $|\beta|<1$, A = 0 $\boxed{\text{2 pont}}$

4. Egy DI rendszer impulzusválasza: $h[k] = 5\,\varepsilon[k]\,0,2^k$, gerjesztő jele: a nem belépő $u[k] = 9\,\delta[k+1]$. Adja meg a rendszer válaszjelét! (2 pont)

   $y[k] = 45\,\varepsilon[k+1]\,0,2^{k+1}$ $\boxed{\text{2 pont}}$

5. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása az alábbi:

   $x[k+1] = -0,5\,x[k] - 2\,u[k]$, $y[k] = 2\,x[k] + u[k]$

Adja meg a rendszer ugrásválaszának (az ε[k] gerjesztő jelre adott válaszának) a k = 0 ütembeli értékét! (2 pont)

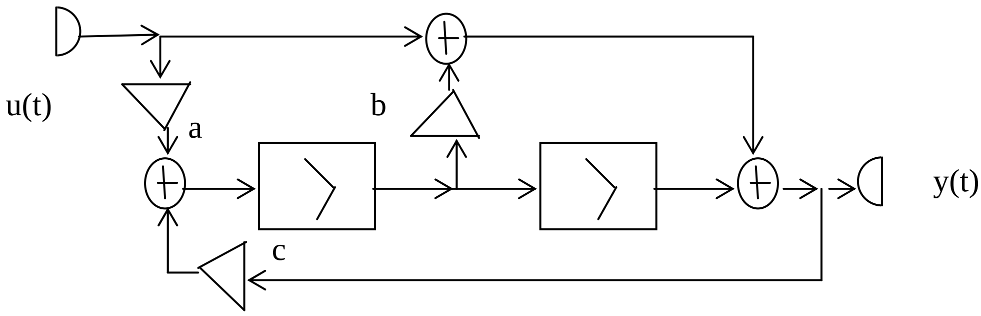
   y[0] = 1 $\boxed{\text{2 pont}}$

Jelek és rendszerek (VIHVA214) 2.zárthelyi, **A** csoport *2008.10.31.*

JAVÍTÁSI PÉLDÁNY
CSAK EGÉSZ PONTSZÁM ADHATÓ

<u>Nagypélda</u>

A folytonos idejű rendszer az alábbi jelfolyam hálózattal adott.



a) Adja meg a rendszer állapotváltozós leírását normál alakban! (7 pont)

b) Az a, b és c erősítések valamely értéke mellett a rendszer állapotváltozós leírása a következő:

$x_1' = -2\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,u,$

$x_2' = x_1,$

$y = x_1 + x_2 + u.$

Adja meg a rendszer átviteli karakterisztikáját, ha létezik, illetve indokolja „nem létezik” válaszát! (8 pont)

c) Az erősítések valamely, az előző ponttól eltérő értéke mellett a hálózat stabilis, a rendszer átviteli karakterisztikája a következő: $H(j\,\omega) = \dfrac{(j\omega)^2 + 12\,j\omega + 6}{(j\omega)^2 + 8\,j\omega + 4}$. Számítsa ki a rendszer válaszjelét, ha periodikus gerjesztő jele: $u(t) = 10 + 5\cos(2\,t - 0{,}5)$! (5 pont)

---

a) A baloldali integrátor kimeneti jele x_1, a jobboldalié x_2.

$x_1' = b\,c\,x_1 + c\,x_2 + (a + c)\,u$

$x_2' = x_1$

$y = b\,x_1 + x_2 + u$ $\boxed{\text{7 pont}}$

b) $$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = 0$$

A karakterisztikus polinom Hurwitz polinom, a hálózat stabilis;

vagy: $\lambda_{1,2} = -1 \pm j$, $\mathrm{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$, a hálózat stabilis, tehát létezik átviteli karakterisztika.

3 pont.

Egyik megoldás: $$H(j\omega) = \frac{\underline{C}^T \operatorname{adj}\left(j\omega\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)\underline{B}}{\det\left(j\omega\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)} + D,$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = 1.$$

$$\left(j\omega\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) = \begin{bmatrix} j\omega + 2 & 2 \\ -1 & j\omega \end{bmatrix}, \qquad \det\left(j\omega\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) = (j\,\omega)^2 + 2\,j\,\omega + 2$$

$$\left(j\omega\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)^T = \begin{bmatrix} j\omega + 2 & -1 \\ 2 & j\omega \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{adj}\left(j\omega\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) = \begin{bmatrix} j\omega & -2 \\ 1 & j\omega + 2 \end{bmatrix}$$ 3 pont

$$H(j\omega) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j\omega & -2 \\ 1 & j\omega + 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}}{(j\omega)^2 + 2\,j\omega + 2} + 1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\,j\omega \\ 3 \end{bmatrix}}{(j\omega)^2 + 2\,j\omega + 2} + 1 = \frac{(j\omega)^2 + 5\,j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 2\,j\omega + 2}$$

2 pont

Másik megoldás: az a) pont eredménye alapján c = - 2, b = 1, a = 5.

A baloldali integrátor szinuszos kimeneti jelének komplex amplitúdóját $\overline{P}$ -vel jelölve:

$j\,\omega\,\overline{P} = -2\,\overline{Y} + 5\,\overline{U}$

$\overline{Y} = \dfrac{1}{j\omega}\,\overline{P} + \overline{P} + \overline{U}$ 3 pont

$$\left.\begin{aligned} j\omega\,\overline{P} + 2\,\overline{Y} &= 5\,\overline{U} \\ -(j\omega+1)\,\overline{P} + j\omega\,\overline{Y} &= j\omega\,\overline{U} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (j\omega+1) \\ j\omega \end{matrix} \qquad \overline{Y}\left((j\omega)^2 + 2\,j\omega + 2\right) = \overline{U}\left((j\omega)^2 + 5\,j\omega + 5\right)$$

$H(j\omega) = \dfrac{(j\omega)^2 + 5\,j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 2\,j\omega + 2}$ 2 pont

Csak egy megoldás értékelhető, a b) feladatra az összpontszám: $\boxed{\text{8 pont}}$

c) $\left.H(j\omega)\right|_{\omega=0} = 1{,}5$; $\left.H(j\omega)\right|_{\omega=2} = \dfrac{2+j\,24}{j16} = 1{,}5052\ e^{-j\,0{,}0831}$ 2 pont

$-4{,}76^{o}$

$y(t) = 15 + 7{,}5260\cos(2\,t - 0{,}5831)$ $(-33{,}41^{o})$ 3 pont

Összpontszám a c feladatra: $\boxed{\text{5 pont}}$

Kispéldák

1. Egy x[k] szinuszos DI jel komplex amplitúdója $\overline{X} = 25\ e^{-j\,\pi/6}$, diszkrét körfrekvenciája $\vartheta = \pi/4$. Írja fel a jel időfüggvényét! (2 pont)

$x[k] = 25\cos\left(k\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)$ $\boxed{\text{2 pont}}$

2. Adja meg az $x[k] = 8\cos(0{,}1\,\pi\,k + 0{,}4\,\pi) + 6\cos 0{,}2\,\pi\,k$ periodikus DI jel periódusát! (2 pont)

$L = 20$ $\boxed{\text{2 pont}}$

3. Az x(t) szinuszos FI jel körfrekvenciája $0{,}1\,\pi$, kezdőfázisa - 0,5 (radián). Mekkora a kezdőfázisa a jel x’(t) deriváltjának? (2 pont)

$-0{,}5 + \dfrac{\pi}{2} = 1{,}0708$ $\boxed{\text{2 pont}}$

4. Egy 20 periódusú, valós DI jel $\overline{X}_2^{\,C}$ komplex Fourier együtthatója 2 – j 5. Adja meg az $\overline{X}_{18}^{\,C}$ komplex Fourier együtthatót! (2 pont)

$\overline{X}_{18}^{\,C} = 2 + j\,5$ ($5{,}3852\ e^{j\,1{,}1903}$, $(68{,}2^{o})$ is jó eredmény.) $\boxed{\text{2 pont}}$

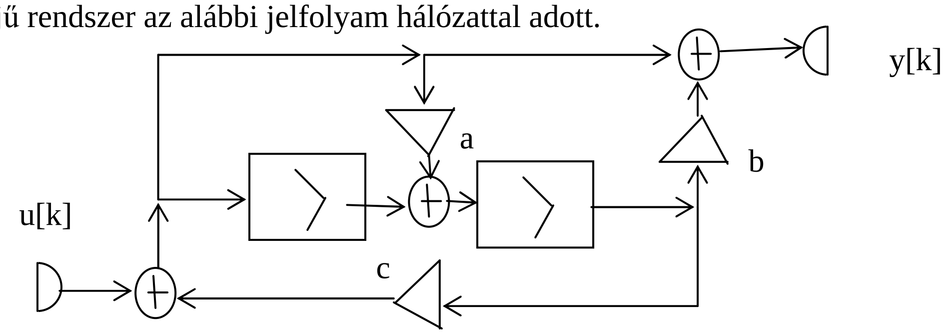
5. Egy DI rendszer átviteli karakterisztikája $H(e^{j\,\vartheta}) = \dfrac{1}{1 + 0{,}5\,e^{-j\vartheta}}$, 4 periódusú periodikus u[k] bemeneti jele alapharmonikusának amplitúdója 2, kezdőfázisa $0{,}1\,\pi$. Adja meg a válaszjel $y_1[k]$ alapharmonikusát! (2 pont)

$y_1[k] = 1{,}7889\cos\left(k\dfrac{\pi}{2} + 0{,}7778\right)$ $(44{,}57^{o})$ $\boxed{\text{2 pont}}$

JAVÍTÁSI PÉLDÁNY
CSAK EGÉSZ PONTSZÁM ADHATÓ

<u>Nagypélda</u>

A diszkrét idejű rendszer az alábbi jelfolyam hálózattal adott.



a) Adja meg a rendszer állapotváltozós leírását normál alakban! (7 pont)

b) Az a, b és c erősítések valamely értéke mellett a rendszer állapotváltozós leírása a következő:

$x_1[k+1] = -0,5\, x_2[k] + u[k],$

$x_2[k+1] = x_1[k] - x_2[k] + 2\, u[k],$

$y[k] = 3,5\, x_2[k] + u[k].$

Adja meg a rendszer átviteli karakterisztikáját, ha létezik, illetve indokolja „nem létezik" válaszát! (8 pont)

c) Az erősítések valamely, az előző ponttól eltérő értéke mellett a hálózat stabilis, a rendszer átviteli karakterisztikája a következő: $H(e^{j\vartheta}) = \dfrac{1 + e^{-j\vartheta} + 5\, e^{-j2\vartheta}}{1 - 0,16\, e^{-j\vartheta} - 0,8\, e^{-j2\vartheta}}$. Számítsa ki a rendszer válaszjelét, ha periodikus gerjesztő jele: $u[k] = 10 + 5\cos(k\,\pi/2 + 0,5)$! (5 pont)

---

a) A baloldalikésleltető kimeneti jele x_1, a jobboldalié x_2.

$x_{1[k+1]} = \qquad c\, x_2[k] + u[k]$

$x_2[k+1] = x_1[k] + a\, c\, x_2[k] + a\, u[k]$

$y[k] = (b + c)\, x_2[k] + u[k]$ $\boxed{\text{7 pont}}$

b) $\begin{vmatrix} -\lambda & -0,5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 0,5 = 0$

$\lambda_{1,2} = -0,5 \pm j\,0,5,\quad \mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = -0,5 < 0 \;\rightarrow\;$ a hálózat stabilis,

vagy a Jury kritérium alapján: $\left.\begin{array}{l} P(\lambda = 1) = 2,5 > 0, \\ P(\lambda = -1) = 0,5 > 0, \\ |a_2| = |0,5| < 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ a hálózat stabilis.

A hálózat stabilis $\rightarrow$ az átviteli karakterisztika létezik. 3 pont

Egyik megoldás: $H\left(e^{j\vartheta}\right) = \dfrac{\underline{C}^T \operatorname{adj}\left(e^{j\vartheta}\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)\underline{B}}{\det\left(e^{j\vartheta}\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)} + D,$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\qquad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3,5 \end{bmatrix},\qquad D = 1.$

$\left(e^{j\vartheta}\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} & 0,5 \\ -1 & e^{j\vartheta} + 1 \end{bmatrix},\qquad \det\left(e^{j\vartheta}\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) = e^{j2\vartheta} + e^{j\vartheta + 0,5}$

$\left(e^{j\vartheta}\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)^T = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} & -1 \\ 0,5 & e^{j\vartheta} + 1 \end{bmatrix},\qquad \operatorname{adj}\left(e^{j\vartheta}\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right) = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} + 1 & -0,5 \\ 1 & e^{j\vartheta} \end{bmatrix}$ 2 pont

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{\begin{bmatrix}0 & 3,5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{j\vartheta}+1 & -0,5\\ 1 & e^{j\vartheta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{e^{j2\vartheta}+e^{j\vartheta}+0,5} + 1 = \frac{\begin{bmatrix}3,5 & 3,5\,e^{j\vartheta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{e^{j2\vartheta}+e^{j\vartheta}+0,5} + 1 = \frac{e^{j2\vartheta}+8\,e^{j\vartheta}+4}{e^{j2\vartheta}+e^{j\vartheta}+0,5} =$$

$$= \frac{1+8\,e^{-j\vartheta}+4\,e^{-j2\vartheta}}{1+e^{-j\vartheta}+0,5\,e^{-j2\vartheta}}$$ Mindkét utóbbi alak teljes értékű 3 pont

Másik megoldás: az a) pont eredménye alapján c = - 0.5, a = 2, b = 4.

A jobboldali késleltető szinuszos kimeneti jelének komplex amplitúdóját $\overline{P}$ -vel jelölve:

$\overline{Y} = 4\,\overline{P} - 0,5\,\overline{P} + \overline{U}$

$\overline{P}\,e^{j\vartheta} = 2\,(-0,5\,\overline{P} + \overline{U}) + e^{-j\vartheta}\,(-0,5\,\overline{P} + \overline{U})$ 3 pont

$$\left.\begin{aligned} -3,5\,\overline{P}+\overline{Y} &= \overline{U} \\ \left(e^{j\vartheta}+1+0,5\,e^{-j\vartheta}\right)\overline{P} &= \left(2+e^{-j\vartheta}\right)\overline{U} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &-\left(e^{j\vartheta}+1+0,5\,e^{-j\vartheta}\right) \\ &3,5 \end{aligned}$$

$$\overline{Y}\left(e^{j\vartheta}+1+0,5\,e^{-j\vartheta}\right) = \overline{U}\left(e^{j\vartheta}+8+4\,e^{-j\vartheta}\right)$$

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{e^{j2\vartheta}+8\,e^{j\vartheta}+4}{e^{j2\vartheta}+e^{j\vartheta}+0,5} = \frac{1+8\,e^{-j\vartheta}+4\,e^{-j2\vartheta}}{1+e^{-j\vartheta}+0,5\,e^{-j2\vartheta}}$$ 2 pont

Csak egy megoldás értékelhető, a b) feladatra az összpontszám: $\boxed{\text{8 pont}}$

c) $\left.H\left(e^{j\vartheta}\right)\right|_{\vartheta=0} = \frac{7}{0,04}175;$ $\left.H\left(e^{j\vartheta}\right)\right|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{-4-j}{1,8+j\,0,16} = 2,2816\,e^{-j\,2,9853}$ 2 pont

$-171,04^{o}$

$y[k] = 1750 + 11,4081\cos\left(k\frac{\pi}{2} - 2,4853\right)$ $(-142,4^{o})$ 3 pont

Összpontszám a c feladatra: $\boxed{\text{5 pont}}$

<u>Kispéldák</u>

1. Adja meg az x(t) = 3 sin 5 t + 4 cos 5 t szinuszos FI jel komplex amplitúdóját! (2 pont)

$\overline{X} = 4 - j\,3 = 5\,e^{-j\,0,6435}$ $(-36,87^{o})$ $\boxed{\text{2 pont}}$

2. Egy FI rendszer amplitúdó karakterisztikája ω = 3 körfrekvencián -6,02 dB Mekkora a rendszert válaszának amplitúdója, ha bemeneti jele u(t) = 6 cos(3 t - 0,1 π) ? (2 pont)

Y = 3 $\boxed{\text{2 pont}}$

3. Egy FI rendszer átviteli karakterisztikája és bemeneti jele: $H(j\,\omega) = \frac{2}{j\omega+2}$ és u(t) = 5 cos (2t - 0,5). Adja meg a rendszer válaszjelét! (2 pont)

y(t) = 3,5355 cos (2 t – 1,2857) $(-73,65^{o})$ $\boxed{\text{2 pont}}$

4. Adja meg az x(t) = 5 cos (12 t + 0,75) + 2 sin 84 t periodikus FI jel periódusát! (2 pont)

$T = \frac{\pi}{6} = 0,5236$ $\boxed{\text{2 pont}}$

5. Egy periodikus x(t) FI jel alapharmonikusának kifejezése $x_1(t) = \sqrt{2}\cos(4\,t + \pi/4)$. Adja meg a jel X_1^C komplex Fourier együtthatóját! (2 pont)

$X_1^C = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{j\,\pi/4} = 0,5 + j\,0,5$ $\boxed{\text{2 pont}}$

JAVÍTÁSI PÉLDÁNY
CSAK EGÉSZ PONTSZÁM ADHATÓ

<u>Nagypélda</u>

Egy két késleltetőt tartalmazó hálózattal adott diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikája a következő: $H\left(e^{j\vartheta}\right) = \dfrac{1 - e^{-j\vartheta} + e^{-j2\vartheta}}{1 + e^{-j\vartheta} + 0{,}5\,e^{-j2\vartheta}}$.

a) Mit állíthatunk a hálózat stabilitásáról? Válaszát indokolja! (2 pont)

b) A rendszer bemeneti jele: $u_b[k] = 16\,(\varepsilon[k] - \varepsilon[k-4])\,0{,}5^k$. Adja meg a válaszjel Fourier transzformáltját! (5 pont)

c) A rendszer periodikus bemeneti jele: $u_c[k] = u_b[k]$, ha $0 \le k \le 7$, és minden k-ra $u_c[k+8] = u_c[k]$.

c1) Adja meg a gerjesztő jel állandó összetevőjét és alapharmonikusának időfüggvényét! (8 pont)

c2) Adja meg a válaszjel állandó összetevőjét és alapharmonikusát! (5 pont)

---

a) A rendszer másodrendű, a nevező polinom együtthatói azonosak a karakterisztikus polinoméval, tehát a rendszer aszimptotikusan stabilis, a hálózat stabilis. $\boxed{\text{2 pont}}$

b) $U\left(e^{j\vartheta}\right) = 16 + 8\,e^{-j\vartheta} + 4\,e^{-j2\vartheta} + 2\,e^{-j3\vartheta} = 16\,\dfrac{\left(0{,}5\,e^{-j\vartheta}\right)^4 - 1}{\left(0{,}5\,e^{-j\vartheta}\right) - 1} = \dfrac{16 - e^{-j4\vartheta}}{1 - 0{,}5\,e^{-j\vartheta}}$, vagy

$u[k] = 16\,\varepsilon[k]\,0{,}5^k - 16\,\varepsilon[k-4]\,0{,}5^4\;0{,}5^{k-4}$, $\quad U\left(e^{j\vartheta}\right) = \dfrac{16}{1 - 0{,}5\,e^{-j\vartheta}} - e^{-j4\vartheta}\dfrac{1}{1 - 0{,}5\,e^{-j\vartheta}}$

$$U\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{16 - e^{-j4\vartheta}}{1 - 0{,}5\,e^{-j\vartheta}} \qquad \text{3 pont}$$

$$Y\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{1 - e^{-j\vartheta} + e^{-j2\vartheta}}{1 + e^{-j\vartheta} + 0{,}5\,e^{-j2\vartheta}}\;\frac{16 - e^{-j4\vartheta}}{1 - 0{,}5\,e^{-j\vartheta}}. \qquad \text{2 pont}$$

($U\left(e^{j\vartheta}\right)$ bármelyik helyes alakját helyettesítve el kell fogadni) Összesen: $\boxed{\text{5 pont}}$

c)

c1) $U_0^C = \dfrac{1}{8}\,(16 + 8 + 4 + 2) = 3{,}75$. Állandó összetevő: $U_0 = 3{,}75$ 2 pont

$$U_1^C = \frac{1}{8}\left(16 + 8\,e^{-j\frac{\pi}{4}} + 4\,e^{-j\frac{2\pi}{4}} + 2\,e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right) \qquad \text{2 pont}$$

$U_1^C = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - j\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 0{,}5\,j - 0{,}25\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} - j\,0{,}25\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2{,}5303 - j\,1{,}3839 =$

$= 2{,}8840\,e^{-j\,0{,}5005}$; $\quad U_1 = 2\left|U_1^C\right| = 5{,}7681$; $\quad \rho_1 = -0{,}5005\;\;(-28{,}68^o)$

vagy $U_1^A = 2\,\mathrm{Re}\,(U_1^C) = 5{,}0607$, $\quad U_1^B = -2\,\mathrm{Im}\,(U_1^C) = 2{,}7678$ 2 pont

Az alapharmonikus időfüggvénye: $u_1[k] = 5{,}7681\cos\left(k\dfrac{\pi}{4} - 0{,}5005\right)$, vagy

$u_1[k] = 5{,}0607 \cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) + 2{,}7678 \sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)$ 2 pont bármelyik alakra.

Összesen a c1) pontra: $\boxed{\text{8 pont}}$

c2) $H\left(e^{j\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=0} = 0{,}4;$ $H\left(e^{j\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}-j}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}-j0{,}5} = 0{,}1981\, e^{-j\,0{,}1699}$

2 pont

A válasz állandó összetevője: $Y_0 = 1{,}5$ 1 pont

alapharmonikusa: $y_1[k] = 1{,}1487 \cos\left(k\frac{\pi}{4} - 0{,}6704\right)$ $(-38{,}41^o)$ 2 pont

Összesen a c2) pontra: $\boxed{\text{5 pont}}$

<u>Kispéldák</u>

1. Egy DI rendszer átviteli karakterisztikája: $H\left(e^{j\vartheta}\right) = \dfrac{1}{1+0{,}8\,e^{-j\vartheta}}$. Adja meg a rendszer impulzusválaszát! (2 pont)

$h[k] = \varepsilon[k]\,(-0{,}8)^k$ $\boxed{\text{2 pont}}$

2. Adja meg a sávszélességét a $H(j\omega) = \dfrac{5}{j\omega+4}$ átviteli karakterisztikájú FI rendszernek, ha amplitúdó karakterisztikája maximumától legfeljebb 3 dB-lel eltérő értékei tartoznak az áteresztő sávba! (2 pont)

$\Omega = 4$ $\boxed{\text{2 pont}}$

3 Adja meg az $y[k] = 2\,x[k-1]$ DI jel amplitúdó spektrumát, ha az $x[k]$ jel amplitúdó spektruma $X(\vartheta)$!! (2 pont)

$Y(\vartheta) = 2\,X(\vartheta)$ $\boxed{\text{2 pont}}$

4. Az $x(t)$ FI jel Fourier transzformáltja $X(j\omega)$. Adja meg az $y(t) = x(t)\cos(\Omega t)$ jel Fourier transzformáltját! (2 pont)

$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\, X\big(j(\omega-\Omega)\big) + \frac{1}{2}\, X\big(j(\omega+\Omega)\big)$ $\boxed{\text{2 pont}}$

5. Adja meg a $h(t) = 2\,\delta(t+1) + 5\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}$ impulzusválaszú FI rendszer átviteli karakterisztikáját, ha létezik, illetve indokolja „nem létezik“ válaszát! (2 pont)

$H(j\omega) = 2\,e^{j\omega} + \dfrac{5}{j\omega+2}$ $\boxed{\text{2 pont}}$

JAVÍTÁSI PÉLDÁNY
CSAK EGÉSZ PONTSZÁM ADHATÓ

Nagypélda

Egy FI rendszer átviteli karakterisztikája a következő: $H(j\,\omega) = \dfrac{8}{(j\omega)^2 + 4\,j\omega + 4}$.

a) A rendszer bemeneti jele: $u_a(t) = 5\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}$.

a1) Adja meg a válaszjel Fourier transzformáltját! (4 pont)

a2) Mekkora a válaszjel sávszélessége, ha amplitúdó spektrumának a maximum 0,8 %-ánál kisebb értékeit tekintjük elhanyagolhatónak? (4 pont)

b) A rendszer periodikus bemeneti jele: $u_b(t) = 10\,\left(\varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)\right)$, ha $-1 \le t \le 7$, és minden t-re $u_b(t+8) = u_b(t)$.

b1) Adja meg a gerjesztő jel állandó összetevőjét és alapharmonikusának időfüggvényét! (8 pont)

b2) Adja meg a válaszjel állandó összetevőjét és alapharmonikusát! (4 pont)

---

a1) $U_a(j\,\omega) = \dfrac{5}{j\omega + 2}$ 2 pont

$Y(j\,\omega) = \dfrac{40}{(j\omega+2)^3}$ ($U_a(j\,\omega)\,H(j\,\omega)$ bármely alakú helyettesítéssel elfogadható.)

2 pont, a1)-re összesen : $\boxed{4\text{ pont}}$

a2) $Y(\omega) = \dfrac{40}{\left(\sqrt{4+\omega^2}\right)^3}$, $\dfrac{40}{\left(\sqrt{4+\Omega^2}\right)^3} = 5 \bullet 0{,}008 = 0{,}04$

$\sqrt{4+\Omega^2} = 10$, $\Omega = \sqrt{96} \approx 9{,}7980$ $\boxed{4\text{ pont}}$

b1) $U_0^C = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_{-1}^{1} 10\,dt = 2{,}5$. Az állandó összetevő: $U_0 = 2{,}5$ 2 pont

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$; $U_1^C = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_{-1}^{1} 10\,e^{-j\frac{\pi}{4}t}\,dt = 1{,}25\left[\dfrac{e^{-j\frac{\pi}{4}t}}{-j\frac{\pi}{4}}\right]_{-1}^{1} = j\,\dfrac{5}{\pi}\left(e^{-j\frac{\pi}{4}} - e^{j\frac{\pi}{4}}\right)$

$U_1^C = \dfrac{5\,j}{\pi}\left(-2\,j\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{10}{\pi}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 4 pont

Az alapharmonikus időfüggvénye: $u_1(t) = \dfrac{10\sqrt{2}}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)$ 2 pont

$\approx 4{,}5016$

b1)-re összesen: $\boxed{8\text{ pont}}$

b2) $H(j\omega)\big|_{\omega=0} = 2$, $H(j\omega)\big|_{\omega=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{8}{4 - \frac{\pi^2}{16} + j\pi} = 1{,}7328\,e^{-j\,0{,}7484}$ $(-42{,}88^{o})$

2 pont

Állandó összetevő: $Y_0 = 5$, alapharmonikus: $y_1(t) = 7{,}8003 \cos\left(\frac{\pi}{4} t - 0{,}7484\right)$ 2 pont

b2)-re összesen : $\boxed{\text{4 pont}}$

<u>Kispéldák</u>

1. Egy DI rendszer válaszjelének Fourier transzformáltja $\frac{e^{-j\vartheta} - e^{-j2\vartheta}}{1 + 0{,}4\, e^{-j\vartheta}}$, ha gerjesztő jele $2\,\delta[k-1]$.

Adja meg a rendszer átviteli karakterisztikáját! (2 pont)

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{0{,}5 - 0{,}5\, e^{-j\vartheta}}{1 + 0{,}4\, e^{-j\vartheta}}$$ $\boxed{\text{2 pont}}$

2. Adja meg azt az x[k] DI jelet, amelynek Fourier transzformáltja $X\left(e^{j\vartheta}\right) = 2\, j \sin \vartheta$! (2 pont)

$x[k] = \delta[k+1] - \delta[k-1]$ $\boxed{\text{2 pont}}$

3 Az x[k] illetve y[k] DI jel Fourier transzformáltja $X\left(e^{j\vartheta}\right)$ illetve $Y\left(e^{j\vartheta}\right)$. Írja fel annak a z[k] DI jelnek a kifejezését, amelynek Fourier transzformáltja $Z\left(e^{j\vartheta}\right) = X\left(e^{j\vartheta}\right) Y\left(e^{j\vartheta}\right)$! (2 pont)

$$z[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]\, y[k-p]$$ $\boxed{\text{2 pont}}$

4. Egy DI jel amplitúdó spektrumának értéke $\vartheta_1 = \frac{\pi}{4}$ diszkrét körfrekvencián 2,5. Mekkora az amplitúdó spektrum $\vartheta_2 = \frac{-7\pi}{4}$ diszkrét körfrekvencián? (2 pont)

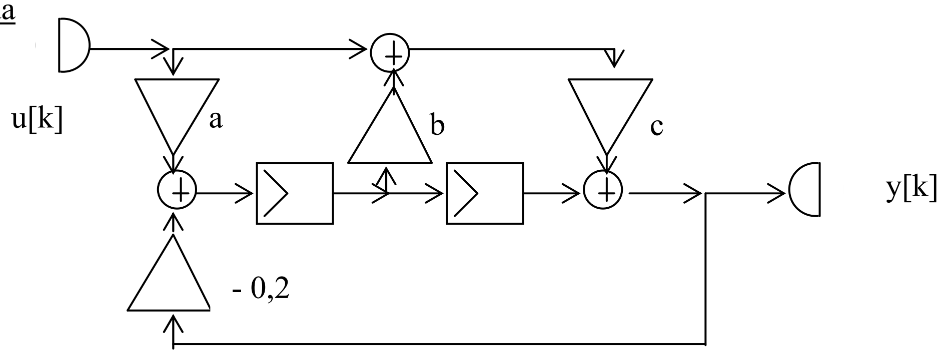
2,5 $\boxed{\text{2 pont}}$

5. Adja meg a $h[k] = 6\,\delta[k+1] + 2\,\varepsilon[k]\, 0{,}9^k$ impulzusválaszú DI rendszer átviteli karakterisztikáját, ha létezik, illetve indokolja „nem létezik“ válaszát! (2 pont)

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = 6\, e^{j\vartheta} + \frac{2}{1 - 0{,}9\, e^{-j\vartheta}} = \frac{6\, e^{j\vartheta} - 3{,}4}{1 - 0{,}9\, e^{-j\vartheta}}$$ $\boxed{\text{2 pont}}$

JAVÍTÁSI PÉLDÁNY
CSAK EGÉSZ PONTSZÁM ADHATÓ

<u>Nagypélda</u>



a) Adja meg a jelfolyam hálózattal adott DI rendszer átviteli függvényét normál alakban! (5 pont)
b) Az „a”, „b” és „c” erősítésekre vonatkozóan adja meg a hálózat stabilitásának feltételét! (4 pont)
c) Az „a”, „b” és „c” erősítések valamely adott értéke mellett az átviteli függvény kifejezése:

$$H(z) = \frac{2 + 3{,}6\, z^{-1} - 0{,}8\, z^{-2}}{1 - 0{,}9\, z^{-1} + 0{,}2\, z^{-2}} \; .$$

c1) Adja meg az átviteli függvényt egy mindent áteresztő és egy minimál fázisú rendszer átviteli függvényének szorzataként! (4 pont)
c2) Számítsa ki az így kapott mindent áteresztő rendszer válaszát, ha bemeneti jele $u[k] = 5\,\delta[k] - 10\,\varepsilon[k-1]\,(-0{,}4)^k$! (5 pont)
c3) Rajzolja fel ennek a mindent áteresztő rendszernek egy kanonikus (minimális számú komponenst tartalmazó) hálózat realizációját! (2 pont)

---

a) $Y = z^{-2}\,(a\,U - 0{,}2Y) + c[b\,z^{-1}\,(a\,U - 0{,}2Y) + U]$ 3 pont

$Y(1 + 0{,}2\,b\,c\,z^{-1} + 0{,}2\,z^{-2}) = U(c + a\,b\,c\,z^{-1} + a\,z^{-2})$

$$H(z) = \frac{c + a\,b\,c\,z^{-1} + a\,z^{-2}}{1 + 0{,}2\,b\,c\,z^{-1} + 0{,}2\,z^{-2}}, \text{ vagy } H(z) = \frac{c\,z^2 + a\,b\,c\,z + a}{z^2 + 0{,}2\,b\,c\,z + 0{,}2} \; .$$ 2 pont

Összesen $\boxed{\text{5 pont}}$

b) A másodrendű rendszer rendszermátrixának karakterisztikus polinomja az átviteli függvény nevezője alapján b c = q jelöléssel: $P(\lambda) = \lambda^2 + 0{,}2\,q\,\lambda + 0{,}2$. 1 pont

Egyik megoldás (Jury kritérium)

$$\left.\begin{array}{r} P(\lambda = 1) = 1{,}2 + 0{,}2\,q > 0 \;\rightarrow\; q > -6 \\ P(\lambda = -1) = 1{,}2 - 0{,}2\,q \;\rightarrow\; q < 6 \\ |\,0{,}2\,| < 1 \end{array}\right\} \rightarrow\; -6 < b\,c < 6, \text{ „a” tetszőleges.}$$ 3 pont

Másik megoldás $\lambda_{12} = -0{,}1\,q \pm \sqrt{0{,}01\,q^2 - 0{,}2}$.

1. Ha $0{,}01\,q^2 < 0{,}2$, azaz $|\,q\,| < \sqrt{20} \approx 4{,}4721$, akkor $\lambda_{12} = -0{,}1\,q \pm j\,\sqrt{0{,}2 - 0{,}01\,q^2}$.

$|\,\lambda_{12}\,|^2 = 0{,}01\,q^2 + 0{,}2 - 0{,}01\,q^2 = 0{,}2 < 1$, q értékétől függetlenül

2. Ha 01 $q^2 > 0{,}2$, azaz $|\,q\,| > \sqrt{20}$, vagyis $q < -\sqrt{20}$ vagy $q > \sqrt{20}$, akkor

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -0{,}1\,q + \sqrt{0{,}01\,q^2 - 0{,}2} < 1 \;\rightarrow\; 0{,}01\,q^2 - 0{,}2 < 1 + 0{,}2\,q + 0{,}01\,q^2 \\ \lambda_2 = -0{,}1\,q - \sqrt{0{,}01\,q^2 - 0{,}2} > -1 \;\rightarrow\; 0{,}01\,q^2 - 0{,}2 < 1 - 0{,}2\,q + 0{,}01\,q^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} q > -6 \\ q < 6 \end{array}\right\}$$

3 pont

Összesen $\boxed{\text{4 pont}}$

c1) $H(z) = \dfrac{2z^2 + 3{,}6z - 0{,}8}{z^2 - 0{,}9z + 0{,}2} = \dfrac{2(z+2)(z-0{,}2)}{(z-0{,}5)(z-0{,}4)} = 2\,\dfrac{z+2}{z+0{,}5}\,\dfrac{(z+0{,}5)(z-0{,}2)}{(z-0{,}5)(z-0{,}4)}$

$H_{MÁ}(z) = \dfrac{2z+4}{z+0{,}5} = \dfrac{2+4z^{-1}}{1+0{,}5z^{-1}}$, $\quad H_{MF}(z) = \dfrac{z^2+0{,}3z-0{,}1}{z^2-0{,}9z+0{,}2} = \dfrac{1+0{,}3z^{-1}-0{,}1z^{-2}}{1-0{,}9z^{-1}+0{,}2z^{-2}}$

Mindegy, hogy a 2-es szorzó melyik tényezőben van. 4 pont

c2) $u[k] = 5\,\delta[k] + 4\,\varepsilon[k-1]\,(-0{,}4)^{k-1}$ $\quad 5\,U(z) = 5 + \dfrac{4z^{-1}}{1+0{,}4z^{-1}} = \dfrac{5+6z^{-1}}{1+0{,}4z^{-1}}$ 2 pont

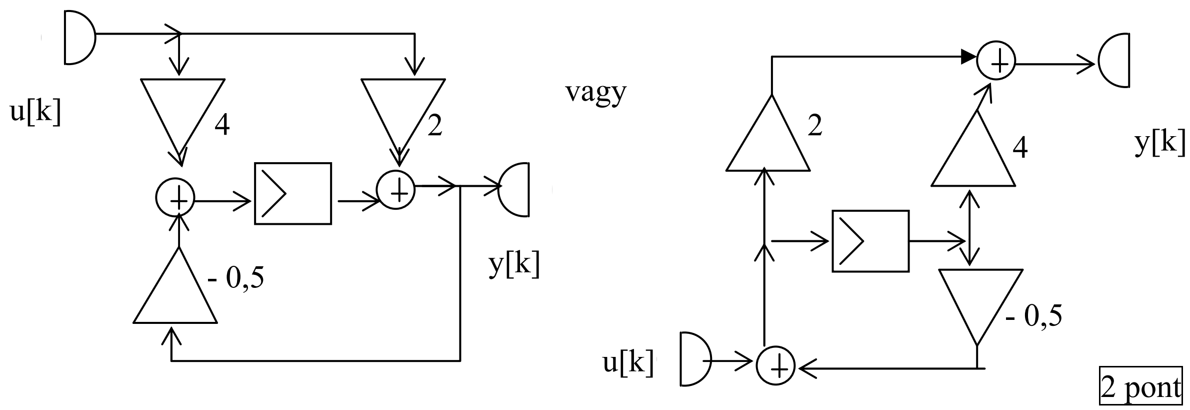
$Y(z) = \dfrac{10+32z^{-1}+24z^{-2}}{1+0{,}9z^{-1}+0{,}2z^{-2}} = z^{-1}z\,\dfrac{10z^2+32z+24}{z^2+0{,}9z+0{,}2} = z^{-1}z\,\dfrac{10(z^2+0{,}9z+0{,}2)+23z+22}{z^2+0{,}9z+0{,}2}$

$Y(z) = 10 + z^{-1}z\left(\dfrac{-105}{z+0{,}5} + \dfrac{128}{z+0{,}4}\right)$ 2 pont

$y[k] = 10\,\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(-105\,(-0{,}5)^{k-1} + 128\,(-0{,}4)^{k-1}\right)$ 1 pont, összesen 5 pont

(Természetesen a fele ott, ahol a c1)-ben a 2-es szorzó a másik tényezőben van.)

c3)



2 pont

Kispéldák

1. Adja meg az $x(t) = 5\,\varepsilon(t-1)\,e^{-2t}$ FI jel Laplace transzformáltját! (2 pont)

$$X(s) = \frac{5e^{-(s+2)}}{s+2}$$ 2 pont

2. Adja meg a $H(z) = \dfrac{4+2z^{-1}}{\left(1-0{,}4z^{-1}\right)^2}$ átviteli függvényű DI rendszer impulzusválaszát! (2 pont)

$$h[k] = \varepsilon[k]\left(4\,(0{,}4)^k + 3{,}6\,k\,(0{,}4)^{k-1}\right) = \varepsilon[k]\,(4+9k)\,(0{,}4)^k$$ 2 pont

3. Mekkora „a" érték mellett minimál fázisú a: $H(s) = \dfrac{s+a}{s^2+5s+10}$ átviteli függvényű FI rendszer? (2 pont) $\quad a > 0$ 2 pont

4. Adja meg a $H(s) = \dfrac{2}{s+5}$ átviteli függvényű FI rendszer DI szimulátorának átviteli függvényét, ha a mintavételi idő a pólus negatív reciprokának huszadrésze! (2 pont)

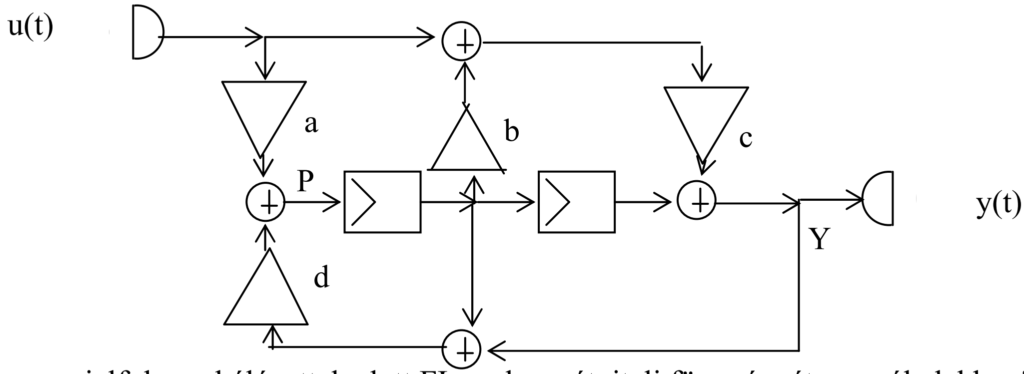
$$H_D(z) = \frac{2z+2}{205z-195} = \frac{0{,}0098+0{,}0098z^{-1}}{1-0{,}9512z^{-1}}$$ 2 pont

5. Adja meg a $H(s) = 5\,\dfrac{s+2}{s+4}$ átviteli függvényű FI rendszer válaszjelét, ha $u(t) = 4\,\mathbf{t}\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}$!

$$y(t) = \varepsilon(t)\,(10e^{-2t} - 10e^{-4t})$$ 2 pont

JAVÍTÁSI PÉLDÁNY
CSAK EGÉSZ PONTSZÁM ADHATÓ

<u>Nagypélda</u> (*Megoldását külön lapra kérjük!*)



a) Adja meg a jelfolyam hálózattal adott FI rendszer átviteli függvényét normál alakban! (5 pont)
b) Az „a", „b", „c" és „d" erősítésekre adja meg a hálózat stabilitásának feltételét! (4 pont)
c) Az „a", „b", „c" és „d" erősítések valamely adott értéke mellett az átviteli függvény kifejezése:

$$H(s) = \frac{s^2 - 0{,}2\,s - 0{,}8}{s^2 + 2{,}5\,s + 1}$$

c1) Adja meg az átviteli függvényt egy mindent áteresztő és egy minimál fázisú rendszer átviteli függvényének szorzataként! (4 pont)
c2) Számítsa ki az így kapott mindent áteresztő rendszer válaszát, ha bemeneti jele $u(t) = 5\,[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$! (5 pont)
c3) Rajzolja fel ennek a mindent áteresztő rendszernek egy kanonikus (minimális számú komponenst tartalmazó) hálózat realizációját! (2 pont)

---

a)
$$\left.\begin{aligned} P &= d\left(\frac{1}{s}P + Y\right) + a\,U \\ Y &= \frac{1}{s^2}P + c\left(b\frac{1}{s}P + U\right) \end{aligned}\right\}$$
3 pont

$$\left.\begin{aligned} P\,(s - d) - d\,s\,Y &= a\,s\,U \\ P\,(-b\,c\,s - 1) + s^2\,Y &= c\,s^2\,U \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\cdot(b\,c\,s + 1) \\ &\cdot(s - d) \end{aligned}$$

$$Y\,(s^3 - d\,s^2 - b\,c\,d\,s^2 - d\,s) = U\,(c\,s^3 - c\,d\,s^2 + a\,b\,c\,s^2 + a\,s)$$

$$H(s) = \frac{c\,s^2 + c\,(a\,b - d)\,s + a}{s^2 - d\,(b\,c + 1)\,s - d}$$
2 pont, összesen $\boxed{\text{5 pont}}$

b) A másodrendű rendszer rendszermátrixának karakterisztikus polinomja az átviteli függvény nevezője alapján: $P(\lambda) = \lambda^2 - d\,(b\,c + 1)\,\lambda - d$. 1 pont

Egyik megoldás (Hurwitz kr.): $d < 0$ és $b\,c + 1 > 0$, azaz $b\,c > -1$, „a" tetszőleges. 3 pont.

Másik megoldás. $bc + 1 = 2\,q$ jelöléssel a sajátértékek: $\lambda_{12} = dq \pm \sqrt{(d\,q)^2 + d}$

Ha $d \geq 0$, a sajátértékek valósak, és a nagyobbik: $\lambda_1 = dq + \sqrt{(d\,q)^2 + d} \geq 0$, a hálózat labilis, tehát $d < 0$ szükséges a stabilitáshoz.

1. Ha $(d\,q)^2 \geq |\,d\,|$, a sajátértékek valósak, a nagyobbik $\lambda_1 = dq + \sqrt{(d\,q)^2 + d} < 0$, ha $q > 0$.

2. Ha $(d\,q)^2 < |\,d\,|$, a sajátértékek komplexek, $d\,q$ valós részük akkor negatív, ha $q > 0$.

A hálózat stabilis, ha $d < 0$ és $q > 0$, azaz $b\,c > -1$, „a" tetszőleges. 3 pont

Csak egy megoldás értékelhető az összpontszám: $\boxed{\text{4 pont}}$

c1)
$$H(s) = \frac{s^2 - 0{,}2\,s - 0{,}8}{s^2 + 2{,}5\,s + 1} = \frac{(s-1)\,(s+0{,}8)}{(s+2)\,(s+0{,}5)} = \frac{s-1}{s+1}\;\frac{(s+1)\,(s+0{,}8)}{(s+2)\,(s+0{,}5)}$$

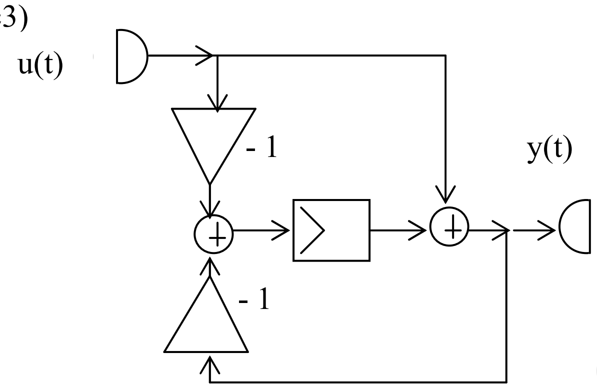
$$H_{MÁ}(s) = \frac{s-1}{s+1}, \qquad H_{MF}(s) = \frac{s^2+1{,}8\,s+0{,}8}{s^2+2{,}5\,s+1}.$$ 4 pont

c2) $U(s) = \frac{5}{s}\left(1-e^{-s}\right)$; 1 pont $\quad Y(s) = \frac{5\,s-5}{s\,(s+1)} - e^{-s}\,\frac{5\,s-5}{s\,(s+1)} = \frac{-5}{s} + \frac{10}{s+1} - e^{-s}\left(\frac{-5}{s} + \frac{10}{s+1}\right)$

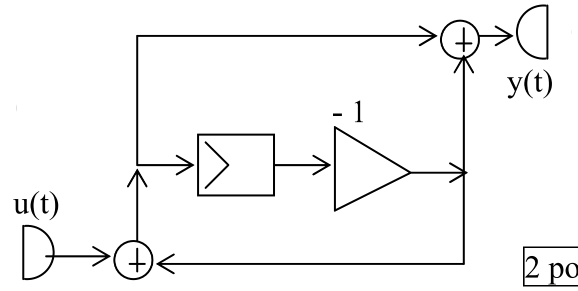
2 pont

$y(t) = \varepsilon(t)\left(10\,e^{-t} - 5\right) - \varepsilon(t-1)\left(10\,e^{-(t-1)} - 5\right)$ 2 pont, összesen 5 pont

c3)



vagy



2 pont

Kispéldák

1. Adja meg az $x_1[k] = \varepsilon[k]\,(-0{,}5)^k$ és az $x_2[k] = \varepsilon[k]\;0{,}5^k$ DI jel konvolúciójának z-transzformáltját! (2 pont)

$$X(z) = \frac{1}{1+0{,}5z^{-1}}\;\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} = \frac{1}{1-0{,}25z^{-2}}$$ 2 pont

2. Adja meg az $x[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3])\,\mathbf{k}$ DI jel z-transzformáltját! (2 pont)

$$X(z) = z^{-1} + 2\,z^{-2} = \frac{z}{(z-1)^2} - z^{-3}\,\frac{z}{(z-1)^2} - 3\,z^{-3}\,\frac{z}{z-1}$$ 2 pont

3. A C_i együtthatókra mi a feltétele a $h[k] = \sum_{i=0}^{4} C_i\,\delta[k-i]$ impulzusválaszú FIR típusú DI rendszer gerjesztés-válasz stabilitásának? (2 pont)

Mindegyik C_i tetszőleges. (Minden FIR típusú DI rendszer GV stabilis, az átviteli függvénynek egyetlen pólusa a 0.) 2 pont

4. Adja meg a $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0{,}5\,z^{-1}}$ átviteli függvényű DI rendszer impulzusválaszát! (2 pont)

$$h[k] = \delta[k] + 0{,}5\;\varepsilon[k-1]\;(-0{,}5)^{k-1} = \delta[k] - \varepsilon[k-1]\;(-0{,}5)^k$$ 2 pont

5. Adja meg a $H(s) = \frac{s+1}{s-1}$ átviteli függvényű FI rendszer átviteli karakterisztikáját, ha létezik, illetve indokolja „nem létezik” válaszát! (2 pont)

Nem létezik, a rendszer GV labilis (a pólus pozitív) 2 pont