

A4 2.pót 2015.11.25

1. Az X sűrűségfüggvényének képlete $5 \cdot x^4$ ($0 \leq x \leq 1$). Számolja ki X variáciáját!

1p: $E(X)$ -et felírja (integrandus és határok jók)

1p: kiszámolja jól

1p: $E(X^2)$ -et felírja (integrandus és határok jók)

1p: kiszámolja jól

1p: Variáciát felírja és kiszámolja

$$\mathbb{E}(X) = \int_{x=0}^1 x \cdot 5 \cdot x^4 dx = \left[\frac{5}{6} x^6 \right]_{x=0}^1 = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{x=0}^1 x^2 \cdot 5 \cdot x^4 dx = \left[\frac{5}{7} x^7 \right]_{x=0}^1 = \frac{5}{7}$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{5}{7} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{252}$$

2. Négy jóbarát mindegyike a többitől függetlenül 0 és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik egy kaszinóba. Tekintsük azt az X pillanatot, amikor a harmadik ember megérkezik. Az időt „órán”-ban mérjük, tehát ha a harmadik ember például fél egykor érkezik, akkor $X = 0.5$. Számolja ki X várható értékét!

1p: a konstans szorzó helyes a sűrűségfüggvényben

1p: az x és az $1-x$ kitevői jók a sűrűségfüggvényben

1p: a $0 < x < 1$ értelmezési tartomány jó a sűrűségfüggvényben

1p: $E(X)$ -et felírja (integrandus és határok jók)

1p: kiszámolja jól

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{esetén} \quad \frac{4!}{(4-3)! \cdot (3-1)!} \cdot (1-x)^{4-3} \cdot (x-0)^{3-1} = 12 \cdot (1-x) \cdot x^2$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{x=0}^1 x \cdot 12 \cdot (1-x) \cdot x^2 dx = \frac{3}{5} \cdot \left[5 \cdot x^4 - 4 \cdot x^5 \right]_{x=0}^1 = \frac{3}{5} = 0.6$$

3. Az X sűrűségfüggvényének képlete $5 \cdot x^4$ ($0 \leq x \leq 1$). Az $X = x$ feltétel mellett Y egyenletes eloszlást követ 0 és x között. Számolja ki az Y/X hányados várható értékét!

1p: $f_1(x)$ -et felírja jól ... $0 \leq x \leq 1$ esetén $5 \cdot x^4$

1p: $f_{2|1}(y|x)$ -et felírja jól ... $0 \leq y \leq x$ esetén $1/x$

1p: $f(x, y)$ -t felírja jól ... $0 \leq y \leq x \leq 1$ esetén $(1/x) \cdot (5 \cdot x^4)$

1p: $E(Y/X)$ -et felírja jól

1p: integrált kiszámolja jól

$$\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot (5 \cdot x^4) dy dx = \int_{x=0}^1 (5 \cdot x^4) \cdot \left(\int_{y=0}^x \frac{y}{x^2} dy \right) dx = \frac{1}{2}$$

4. A kérdésre a választ táblázatosan — mintha táblázatkezelőben dolgozna, vagy pedig mondatokba öltött formában adja meg! A válasz rövid és világos legyen!

4/a. Az első feladatban szereplő valószínűségi változót szimulálja!

2p: X -et jól szimulálja ... =POWER(RAND(), 1/5)

4/b. A második feladatban szereplő várható értéket hogyan lehet szimulációval közelíteni?

2p: X -et jól szimulálja

1p: $E(X)$ -et jól közelíti átlaggal

A1=RAND() B1=RAND() C1=RAND() D1=RAND() E1=SMALL(A1:D1, 3) ... =AVERAGE(E:E)