7. Előadás

10.20

Várható érték:

diszkrét esetben: $m = \sum_x x\, p(x)$

$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \approx m$

(az átlag közelíti az m-et)

folytonos esetben: $m = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

——— " ———

$\frac{t(x_1) + t(x_2) + \ldots + t(x_N)}{N} \approx$

X

$y = t(x)$

$Y := t(X)$

$$\approx \begin{cases} \sum_x t(x) \cdot p(x) & \text{diszkrét esetben} \\ \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \cdot f(x)\, dx & \text{folytonos esetben} \end{cases}$$

Speciális eset: $t(x) = x^2$

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N} \approx \begin{cases} \sum_x x^2 \cdot p(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx \end{cases}$$

ezek a val. változó 2-ik momentumai

(ha x^k-ik time, akkor k-adik momentum time

(Az 1. momentum maga a várható érték)

binomiális eloszlásra: 2-ik momentuma:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \frac{(n-1)!}{\ell!\,((n-1)-\ell)!}\, p^{\ell} (1-p)^{(n-1)-\ell} \cdot n \cdot p$$

$k=0$ esetén $k=1$

$\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\frac{n!}{(k-1)!}$

$n-k = (n-1)-(k-1)$

$k-1 := \ell$

$k = \ell+1$

$$= np \left[\underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \cdot \frac{(n-1)!}{\ell!\,((n-1)-\ell)!}\, p^{\ell} (1-p)^{(n-1)-\ell}}_{(n-1),\,p \text{ bin eloszlás várható értéke } (n-1)\cdot p} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} 1 \cdot \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{(n-1)-\ell}}_{1} \right]$$

$$= np\left[(n-1)p + 1\right] = \boxed{n^2p^2 - np^2 + np}$$

2. példa: $[A, B]$ -n egyenletes

$$f(x) = \frac{1}{B-A} \qquad (A < x < B)$$

2-ik momentum: $$\int_A^B x^2 \frac{1}{B-A}\,dx = \frac{1}{B-A}\left[\frac{x^3}{3}\right]_A^B = \frac{1}{3}\frac{B^3-A^3}{B-A} = \frac{A^2+AB+B^2}{3}$$

3. példa: exponenciális eloszlás, λ-paraméter

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x \geq 0)$$

$$m = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \underbrace{\left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

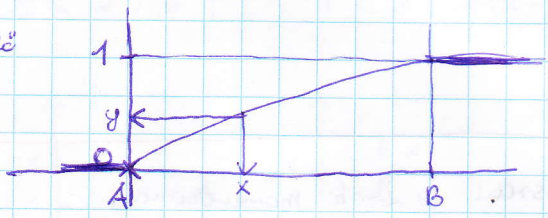
2-ik momentum $$\int_0^\infty \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{v'}\,dx = \underbrace{\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-\lambda x}\,dx =$$

$u' = 2x \quad v = -e^{-\lambda x}$

$$= \frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$F(x)$ $[A, B]$-n mon. növekedő

$x = F^{-1}(y) \quad (0 < y < 1)$



pl. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$

$y = 1 - e^{-\lambda x}$

$e^{-\lambda x} = 1 - y$

$$x = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda} = F^{-1}(y)$$

Előállítás számítógéppel adott eloszlású val. változót:

$X := F^{-1}(RND)$

ennek el. fv.-e nem más mint az ~~első~~ előre adott $F(x)$ fv

$$X := -\frac{\ln(1-RND)}{\lambda}$$

$X_1, X_2, \dots, X_N$

$$\overline{X}_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

$$\frac{|X_1 - \overline{X}_N| + |X_2 - \overline{X}_N| + \dots + |X_N - \overline{X}_N|}{N} \approx \frac{|X_1 - m| + |X_2 - m| + \dots}{N}$$

$\overline{X}_N \approx m$

$g = t(x) = |x - m|$

$$\approx \begin{cases} \sum_x |x-m| \cdot p(x) & \text{(diszkrét)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x-m| f(x)\,dx & \text{(folytonos)} \end{cases}$$

Átlagos abszolút eltérés

négyzetre:

$$\frac{(X_1 - \overline{X}_N)^2 + (X_2 - \overline{X}_N)^2 + \dots + (X_N - \overline{X}_N)^2}{N} = \frac{(X_1 - m)^2 + \dots (X_N - m)^2}{N} \approx \begin{cases} \sum_x (x-m)^2 p(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx \end{cases}$$

Szórásnégyzet

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2mx + m^2) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - 2m \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx + m^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

~~2-ik momentum~~ — 2-ik momentum — m — 1

Szórásnégyzet = 2-ik momentum − (várható érték)^2 = variancia

binomiális eloszlásra:

$$\sigma^2 = (n^2p^2 - np^2 + np) - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

szórásnégyzet

egyenletes eloszlásra

$$\sigma^2 = \frac{A^2 + AB + B^2}{3} - \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 - 2AB + B^2}{12} = \frac{(B-A)^2}{12} \qquad \sigma = \frac{B-A}{\sqrt{12}}$$

szórásnégyzet — szórás

$[0,1]$-re $\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$

exponenciális eloszlásra

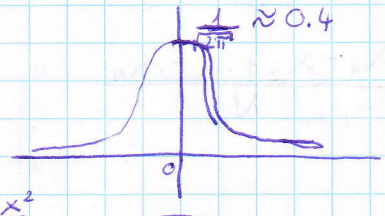
$$\frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

szórásnégyzet — a szórás

Normális eloszlások (Gauss)

1, Standard normális eloszlás

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

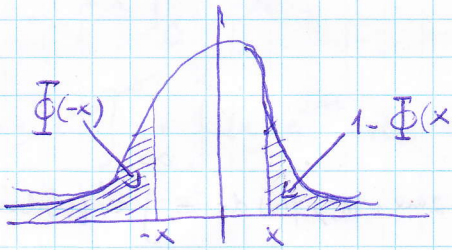


$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad \text{mert} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

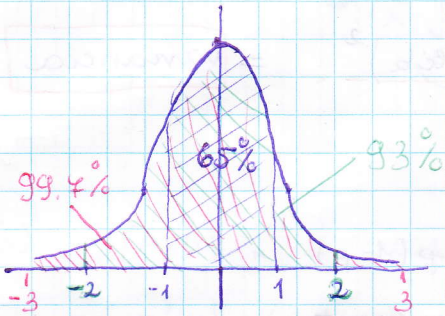
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \text{nem lehet elemi fv.-ekkel felírni}$$

x	$\Phi(x)$
0	
0.001	
0.002	
⋮	

← könyvben így van benne



$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$



-1, 1 → 65%
-2, 2 → 93%
-3, 3 → 99.7%

$-\infty < m < \infty$

$\sigma > 0$

m, σ par. nom.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

v. é. = m

szórás = σ

Ha egy X véletlen érték sok, független kis mennyiség összegeként áll elő, akkor ezt a véletlen értéket normális eloszlásúnak tekinthetjük valamilyen m, σ paraméter-párral. (sok, független, kis szórás -ra is ez a jó)

4. Gyakorlat

10.24.

a,

$X=$	1	2	3	4
$P(X)=$	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{16}{30}$

$p(x) = \frac{x^2}{30}$

$E(x) = \frac{1}{30} + \frac{8}{30} + \frac{27}{30} + \frac{64}{30} = \frac{100}{30} = 3.33$

~~Szórásnégyzet~~: $\sum x^2 p(x) = \frac{1}{30} + \frac{16}{30} + \frac{81}{30} + \frac{256}{30} = 11.8$

2-ik momentum

szórásnégyzet: $11.8 - \left(\frac{100}{30}\right)^2 = 0.689$

Szórás: $\sqrt{11.8 - \left(\frac{100}{30}\right)^2} = \sigma = 0.83$

b,

$X=$	0.5	1	1.5	2
$P(X)=$	0.033	$\frac{2}{30}$	$\frac{4.5}{30}$	$\frac{8}{30}$

$E(x) = \frac{3.33}{2}$

2-ik mom: $\frac{11.8}{2}$

Szórás: $\frac{0.83}{2}$

$\sum x p(x) = m$ $\qquad \sqrt{\sum (x-m)^2 p(x)} = \sigma$

$\sum \frac{1}{2} x\, p(x) = \frac{1}{2} m$ $\qquad \sqrt{\sum \left(\frac{1}{2}(x-m)\right)^2 p(x)} = \frac{\sigma}{2}$

ha a val. változó értékeit konstanssal szorozzuk, akkor a szórás és a várható érték is szorzódik konstanssal.

ha a val. változóhoz hozzáadunk konstanst, akkor a szórás nem változik, a várható érték is konstanshoz nő/csökken.

$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$

ilyen eloszlású val. változó generálása:

$$F(x) = \int_0^x 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^x = x^2 = y$$

innen: $x = \sqrt{y}$

$$X = \sqrt{RND}$$

várható érték $= \int_0^1 x\,2x\,dx = \left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

2-ik momentum $= \int_0^1 x^2\,2x\,dx = \left[2\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

szórásnégyzet $= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$

szórás $= 0.23$

$m = 3 \qquad x = ?$

$\sigma = 2$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-3)^2}{4}}$$

$\sigma = 20$

$m = 80$

$x < 50 \quad P(x) = ? \quad = 6.7\,\%$

$80 < x < 100 \quad P(x) = ? \quad = 34\,\%$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,20} \cdot e^{-\frac{(x-80)^2}{800}}$$

$$\boxed{F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}$$

2h. 15-14 között

diszkrét eloszlásokig kell

+ folytonosból $f(x)$, $F(x)$

expon eloszlás

m

nem kell: $E(\epsilon X)$

$E(X^2)$

σ^2

σ

norm. eloszlás

10. 29.

8. Előadás

Diszkrét eloszlások a síkon (2D-s problémák)

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

11	12	13	14	15	16
⋮					
61	62	...	...	...	66

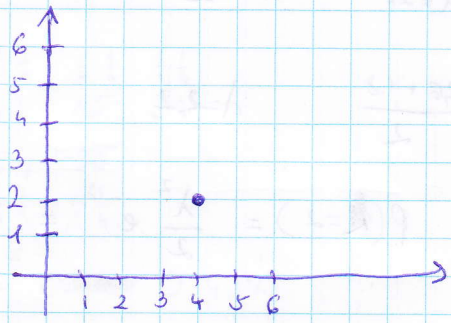
36 kimenetel

X := két nagy kocka maximuma

ha pl $X=4$ adódik, akkor

Y értelmezéséhez [1 2 3 4] 4 alli egy ládában, ebből húzok visszatevéssel kétszer,

Y := a kihúzott számok minimuma



most $Y=2$ jött ki

1, $(X,Y)=(4,2)$

2, $(X,Y)=(6,2)$

3, $(X,Y)=$

ha $X=6 \rightarrow$ [1 2 3 4 5 6]

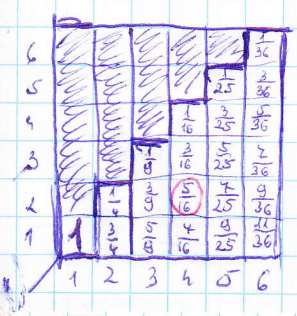
ha $x=2 \rightarrow$ [1 2]

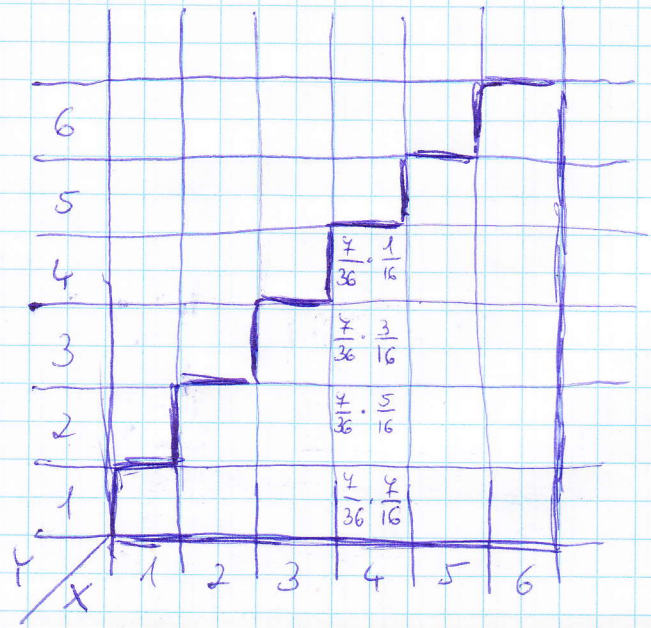
$X = \max$ [1, 2, ..., 6]

$X=k$, [1, 2, ..., k] $\}(X,Y)$

$Y = \min$

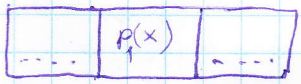
X :=	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$



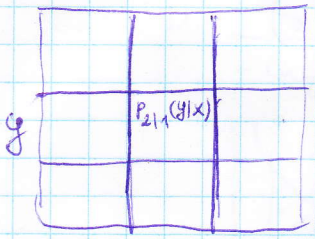


$P(X=4 \text{ és } Y=2) = P(X=4) \cdot P(Y=2 \mid X=4)$

ez a SZORZÁSI TÉTEL

X: 

Y felt eloszlásai:



$$P(x,y) = P_1(x) \cdot P_{2|1}(y|x)$$

$$P_1(x) = P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y) = \sum_y P(x,y)$$

$$P_2(y) = P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y) = \sum_x P(x,y)$$

$$P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x \text{ és } Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P(x,y)}{P_2(y)}$$

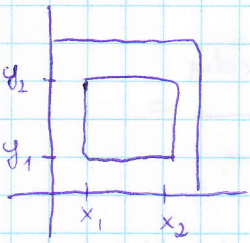
$$P(x,y) = P_2(y)\, P_{1|2}(x|y)$$

$$P((x,Y) \in T) = \cancel{P(\dots)} \cdot P(x_1 < X < x_2 \text{ és } y_1 < Y < y_2) = \underbrace{P(x_1 < X < x_2)} \cdot \underbrace{P(y_1 < Y < y_2)}$$

$X = \sqrt{RND_1}$

$Y = \sqrt{RND_2}$

$$= \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{x=x_1}^{x_2} 2x \cdot 2y \, dx\, dy = \left| \int_{x_1}^{x_2} 2x\, dx \quad \int_{y_1}^{y_2} 2y\, dy \right|$$



$$= \left| \int_T 4xy \, dx\, dy \right|$$

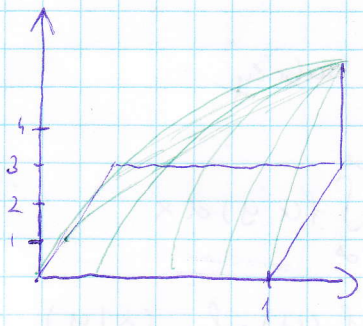
Téglalap és oldalaival

(ill. $f(x) = 4xy$)

$$P((x,y) \in A) = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy$$

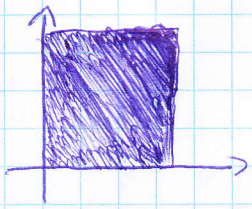
a sűrűségfüggvény $f(x)$

$f(x,y) = 4xy$ = konstans



egy felület

Eloszlás szemléltetése tömegeloszlás szemléltetésével

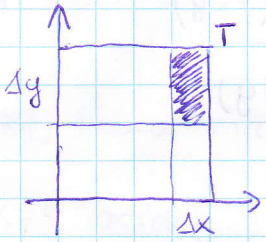


X $f_1(x)$ első koordináta

Ha $X=x$ adódik, akkor Y sűrűségfv.-e $f_{2|1}(y|x)$

(X,Y) sűrűségfv.-e $= f(x,y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$

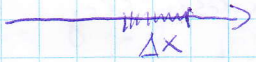
$$f(x,y) \approx \frac{P((x,y)\in T)}{\text{ter}(T)} = \frac{P(X\in\Delta x \text{ és } Y\in\Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$



$$= \frac{P(X\in\Delta x)\cdot P(y\in\Delta y \mid x\in\Delta x)}{\Delta x \cdot \Delta y} \approx f_1(x)\cdot f_{2|1}(y|x)$$

$$\boxed{P(x,y) = P_1(x)\cdot P_{2|1}(y|x)}$$





$$f_1(x) \approx \frac{P(X\in\Delta x)}{\Delta x} = \frac{P((x,y)\in S)}{\Delta x} = \frac{\iint_S f(x,y)\,dx\,dy}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\right)dx}{\Delta x} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad \Delta x = (x_1, x_2)$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad \text{szorzási szabály}$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \qquad \text{osztási szabály}$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

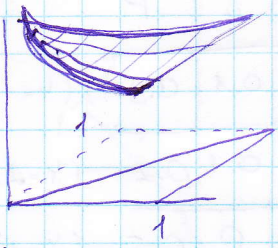
$$f(x,y) = f_2(y)\cdot f_{1|2}(x|y)$$

příklad:

X $\quad f_1(x) = 1 \qquad (0 < x < 1)$

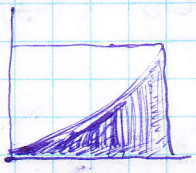
Y $\quad f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x} \qquad (0 < y < x)$

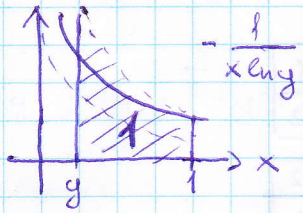
$$f(x,y) = \frac{1}{x} \qquad (0 < y < x < 1)$$

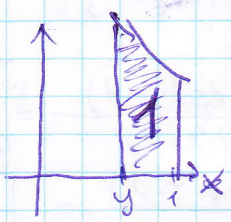


$$f_2(y) = \int_{x=y}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx = -\ln y \qquad (0 < y < 1)$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{\frac{1}{x}}{-\ln y} = -\frac{1}{x \ln y} \qquad (0 < y < x < 1)$$







10.31.

8. Gyakorlat

diszkrét eset:

Y \ X	1	2	3	4	P	
1	0.1	0.05	0.05	0.1	0.3	(Y=1)
2	0.02	0.08	0	0.1	0.2	(Y=2)
3	0.2	0.2	0.1	0	0.5	(Y=3)
P	0.32	0.33	0.15	0.2		
	(X=1)	(X=2)	(X=3)	(X=4)		

$$P(Y=1 \mid X=1) = \frac{P(X=1 \text{ és } Y=1)}{P(X=1)} = \boxed{\frac{0.1}{0.32}}$$

$$P(Y=2 \mid X=1) = \frac{P(X=1 \text{ és } Y=2)}{P(X=1)} = \boxed{\frac{0.02}{0.32}}$$

$$P(Y=3 \mid X=1) = \frac{P(X=1 \text{ és } Y=3)}{P(X=1)} = \boxed{\frac{0.2}{0.32}}$$

$P(X=1 \mid Y=1) = \dots$

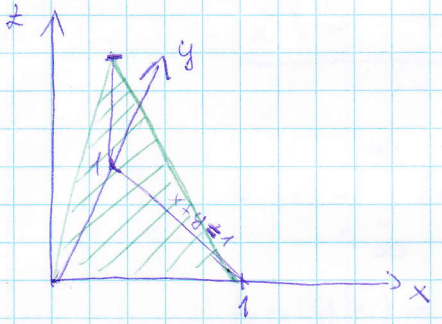
$P(X=2 \mid Y=1) \dots$

$P(X=3 \mid Y=1) \dots$

$P(X=4 \mid Y=1) \dots$

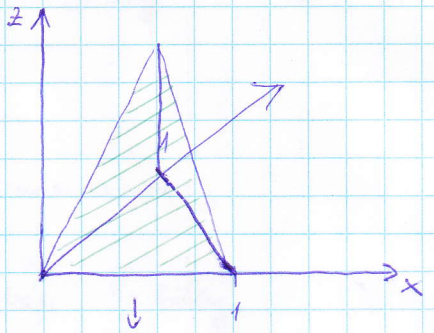
folytonos eset:

$f(x,y) = c \cdot y \qquad x>0,\ y>0,\ x+y<1$



felület

=



ennek a gúlatérfogatnak kell lennie egyenlővé 1-el

(gúlatérfogat: $V = \frac{A \cdot m}{3}$

A = az alaphsz. területe)

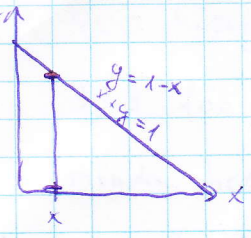
$$1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot c}{3}$$

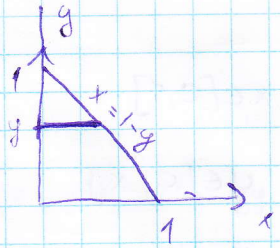
$$c = 6$$

$$f_1(x) = \int_0^{1-x} 6y\,dy = \left[3y^2\right]_0^{1-x} = 3(1-x)^2 = 3-6x+3x^2 \qquad x\in[0,1]$$

$$f_2(y) = \int_0^{1-y} 6y\,dx = 6y\cdot(1-y) = 6y-6y^2$$

a tartomány ahol ez, mert $y \le 1-x$



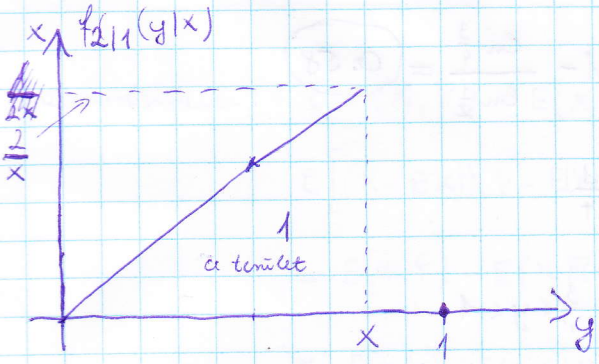


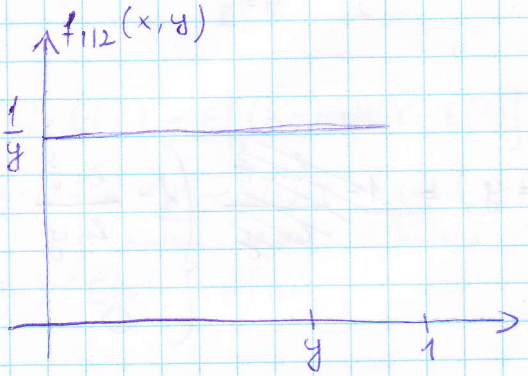
$$F_1(x) = \int_0^x (3-6x+3x^2)\,dx = \left[3x-3x^2+x^3\right]_0^x = 3x-3x^2+x^3 = \underbrace{(x-1)^3+1}\qquad x\in\,]0,1[$$

$$F_2(y) = \int_0^y (6y-6y^2)\,dy = \left[3y^2-2y^3\right]_0^y = 3y^2-2y^3 \qquad (0<y<1)$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{6y}{3-6x+3x^2} = \frac{2y}{x^2-2x+1} \qquad \begin{matrix} x\in(0,1) \\ y\in(0,1-x)\end{matrix}$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{6y}{6y-6y^2} = \frac{6}{6-6y} = \frac{1}{1-y} \qquad \begin{matrix} 0<y<1 \\ 0<x<1-y\end{matrix}$$





$$F_{2|1}(y|x) = \int_0^y \frac{2y}{x^2-2x+1}\,dy = \left[\frac{y^2}{x^2-2x+1}\right]_0^y = \boxed{\frac{y^2}{x^2-2x+1}} \qquad \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<y<1-x\end{matrix}$$

$$F_{1|2}(x,y) = \int_0^x \frac{1}{1-y}\,dx = \frac{1}{1-y}x \qquad \begin{matrix} 0<x<1-y \\ 0<y<1\end{matrix}$$

Egy eloszlású val. változó létrehozása:

① $F_1(x) = u$

$x = F_1^{-1}(u)$

$X = F_1^{-1}(RND_1)$

$(x-1)^3+1 = u$

$(x-1)^3 = u-1$

$x-1 = \sqrt[3]{u-1}$

$x = 1+\sqrt[3]{u-1}$

$X = 1+\sqrt[3]{RND_1-1}$

a feltételes cucc:

② $F_{2|1}(y|x) = v$

$y = F_{2|1}^{-1}(v|x)$

$Y = F_{2|1}^{-1}(RND_2|X)$

$\left(\frac{y}{1-x}\right)^2 = v \qquad y = (1-x)\sqrt{v}$

$Y = (1-X)\sqrt{RND_2}$

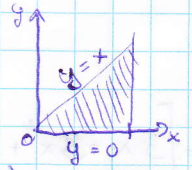
2. példa



X 0 és 1 között egyenletes eloszlással, majd y 0 és x között egyenletes eloszlással

$f_1(x) = 1 \qquad x \in [0,1]$

$f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x} \qquad y \in [0, x]$

$f(x,y) = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ tartománya:  $(0 < y < x < 1)$

$f_2(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln y \qquad y \in (0,1)$

$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\ln y}$ $\quad y < x < 1$, $0 < y < 1$

$P(X < \frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$

$P(X < \frac{3}{4} \mid Y = \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\frac{1}{x}}{-\ln y}\,dx = \frac{\frac{1}{x}}{-\ln\frac{1}{2}} = \left[\frac{\ln x}{-\ln\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = -\frac{\ln\frac{3}{4}}{\ln\frac{1}{2}} + 1 =$

$= 1 - \frac{\ln\frac{3}{4}}{\ln\frac{1}{2}} = 0.58$

képlet:

$P(X < \frac{3}{4} \mid Y = y) = \begin{cases} 1 - \frac{\ln\frac{3}{4}}{\ln y} & y < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{ha } \frac{3}{4} < y < 1 \end{cases}$

9. Előadás

11.0

Cél:

Feladat: 400 hallgató

328 fős terem

minden hallgató 80 % valószínűséggel elmegy az órára, egymás

tól függetlenül.

P(befernek) = ?

Ismétlés:

	X és Y független	nem függetlenek
$E(X+Y)$	$E(X)+E(Y)$	$E(X)+E(Y)$
$E(X\cdot Y)$	$E(X)\cdot E(Y)$	?
$\sigma^2(X+Y)$	$\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)$	$\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)+2\cdot cov(X,Y)$
$cov(X,Y)$	0	?

diszkrét esetben

bizo: $E(X+Y) = \sum_x \sum_y (x+y)\, P(X=x, Y=y) =$

$= \sum_x x \sum_y P(X=x, Y=y) + \sum_y y \sum_x P(X=x, Y=y) =$

$P(X=x)$ $P(Y=y)$

$= E(X) + E(Y)$

kovarancia: $cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$

$E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] = E\left[X\cdot Y - X\cdot \underbrace{E(Y)}_{\text{konstans}} - \underbrace{E(X)}_{\text{konstans}}\cdot Y + \underbrace{E(X)\cdot E(Y)}_{\text{konstans}}\right] =$

$= E(X\cdot Y) - E(X\,E(X)) - E(E(X)Y) + E(X)\cdot E(Y) =$

$= E(X\cdot Y) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$

Ha $cov(X,Y) = 0 \not\Rightarrow$ függetlenek

példa:

Jelek \ A4	1	2	3	4	5
1	0.2	0.1	0.1	0	0
2	0	0.1	0.1	0	0
3	0	0.1	0.1	0.1	0.1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

$cov(X,Y) = 0.7$

X := Jelek jegy

Y := A4 jegy

$cov(X,Y) = ? = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$

$E(X\cdot Y) = 0.2\cdot 1\cdot 1 + 0.1\cdot 1\cdot 2 + 0.1\cdot 1\cdot 3 +$

$+ \quad 0.1\cdot 2\cdot 2 + 0.1\cdot 3\cdot 3 +$

$+ \ldots = 5,9$

$E(X) = 1\cdot(0.2+0.1+0.1) + 2(0.1+0.1) +$

$3\cdot(0.1+0.1+0.1+0.1) = 2$

$E(Y) = 2,6$

Normális eloszlás:

várható érték: m
szórás: σ
} paraméterek

STANDARD normális:

$$m = 0 \quad \sigma = 1 \quad , \quad sf: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dt \longrightarrow \text{TÁBLÁZAT}$$

STANDARDIZÁLÁS: $\frac{X-m}{\sigma}$ Standard normális lesz

példa:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik ember eljön} \\ 0 & \text{ha az } i\text{-edik ember nem jön el} \end{cases}$$

függetlenek, $P(X_i = 1) = 0.8$

$i = 1, 2, \ldots, 400$

$S_{400} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{400}$

$P(S_{400} < 328) = ?$

$E(X_1) = 0.8 \implies E(S_{400}) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_{400}) = 320$

$\sigma(S_{400}) = ?$

$$\sigma^2(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 0.8 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot 0^2 - (0.8)^2 =$$

$$= 0.8(1 - 0.8) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$$

$$\sigma^2(S_{400}) = \sigma^2(X_1) + \ldots + \sigma^2(X_{400}) = 400 \cdot 0.16$$

$$\sigma^2(S_{400}) = 20 \cdot 0.4 = 8$$

S_{400} közelíthető normális eloszlással:

paraméterei: $m = 320 \quad \sigma = 8$

$$P(S_{400} < 328) = P(S_{400} - 320 < 328 - 320)$$

$$= P\left[\left(\frac{S_{400} - 320}{8}\right) < \left(\frac{328 - 320}{8}\right)\right] \approx \Phi(1) \approx \boxed{0.8413}$$

(Miért nem Poisson? $\longrightarrow \lambda = 320 \implies$ Ez baj! és nem bicsi.)

Tétel: (Meivre - Laplace): A binomiális eloszlás közelíthető normálissal, ha p fix, n „nagy".

Binomiális eloszlásnál: $m = p \cdot n$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$$

Általában:

Centrális Határeloszlás tétel (CHT): sok darab kis szórású független összege normális.

példa:

~~P(1200~~ 12000 kockadobás

6-osok száma =: X → binomiális eloszlás: $n = 12000$, $p = \frac{1}{6}$

$P(1900 < X < 2150) = ?$

$$= p\left(\underbrace{\frac{1900 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}}_{-2,449} < \frac{X - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} < \underbrace{\frac{2150 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}}_{3,674} \right) =$$

↓ Standard normálisnak vesszük

$$\approx \Phi(3,674) - \Phi(-2,449) = \text{TÁBLÁZATBÓL} = 1 - (1 - 0,9927) = 0,9$$

példa: Északi sarki tábor, folyamatos világítás kell.

izzók exp eloszlás, 10 órás időtartam a várható érték $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}$

Hány izzó kell, ha 60 napig vannak és 90%-os valószínűséggel elég lesz.

$P(\text{60 napig bírtak a készlet}) > 0,9$

$60 \cdot 24$ óra kell (= 1440 óra) kérdés $n = ?$ (n: izzók száma)

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

↓ fogamatos világítás élettartama; X_1: izzók élettartama, X_2: tartalék

CHT-ből következik → S_n normálissal közelíthető $E(S_n) = n \cdot 10$

$$\sigma(X_1) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{\lambda} = \sqrt{n} \cdot 10$$

$$P(S_n > 1440) = P\left(\frac{S_n - n \cdot 10}{\sqrt{n} \cdot 10} > \frac{1440 - n \cdot 10}{\sqrt{n} \cdot 10} \right) = 0,9$$

↓ standard normális

n nagy

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1440 - n \cdot 10}{\sqrt{n} \cdot 10}\right) = 0.9$$

$$\frac{1440 - 10n}{\sqrt{n} \cdot 10} < -1.28$$

mo: $n \geq 160$

---

példa: Dömötör ruletteznek:

10 petákot tesz fel a pirosra | 100 játék alatt 300 a vesztesége

Jogos-e a gyanú, hogy átverik?

65-ször veszít, 35-ször nyer

$P(\text{nyer}) = \frac{18}{37}$

$n = 100 \rightarrow$ nagy

binomiális eloszlás, közelítünk normálissal

$X :=$ a nyerések száma

$$P(X < 35) = P\left(\frac{X - 100 \cdot \frac{18}{37}}{\sqrt{100 \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37}}} < \underbrace{\frac{35 - 100 \cdot \frac{18}{37}}{\sqrt{100 \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37}}}}_{-2,43}\right) = \quad \left(\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)\right)$$

↓ ezt közelítjük standard normálissal

$$\approx \Phi(-2,43) \approx 1 - \Phi(2,43) \approx \underline{0,003}$$

Tehát valószínűleg igaza van, hogy átverik

9. gyakorlat

- Elmaradt

Regressziók:

1, X $f(x)$ $F(x)$ c $|X-c| = h(X)$ $k(x)=|x-c|$

$X_1, X_2, \dots, X_N$ $\dfrac{|X_1-c|+|X_2-c|+\dots+|X_N-c|}{N} \approx E(|X-c|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-c| \cdot f(x)\,dx$

átlagos eltérés egy c-értéktől

2, $\dfrac{(X_1-c)^2+(X_2-c)^2+\dots+(X_N-c)^2}{N} \approx E\left((X-c)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 f(x)\,dx$

$k(x)=(x-c)^2$

átlagos négyzetes eltérés

1, $c=?$ $E(|X-c|) = \min$

2, $c=?$ $E\left((X-c)^2\right) = \min$

1, $h(c) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-c|\, f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} (c-x)\cdot f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} (x-c)\cdot f(x)\,dx =$

$= \int_{-\infty}^{c} c\cdot f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{c} x\cdot f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx - \int_{c}^{\infty} c\cdot f(x)\,dx$

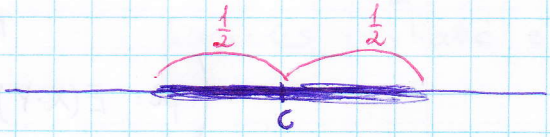
$h'(c) = 1\cdot \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + c\cdot f(c) - c\cdot f(c) - \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx + c f(c) - c\cdot f(c) = F(c)$

$= F(c) - \left(1-F(c)\right) = \boxed{2\cdot F(c)-1}$

$h'(c) = 2F(c)-1 = 0$ $\quad F(c) = \frac{1}{2}$

A $h(c)$ minimumhelye a mediánnál van

$c_0 = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ medián



$P(X<c_0) = P(X>c_0) = \frac{1}{2}$

c_0 medián

2, $h(c) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 f(x)\,dx$

$$h'(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x-c)^2}{dc} \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2(x-c)\cdot(-1) f(x)\,dx = -2\left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx - c \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{1}\right) = 0$$

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = m$$

várható érték

példa: X exp. λ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$

medián: $1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ várható érték: $\frac{1}{\lambda}$

$\frac{1}{2} = e^{-\lambda x}$

$2 = e^{\lambda x}$

$\ln 2 = \lambda x$

$x = \frac{\ln 2}{\lambda}$

medián ≠ várható érték

példa: $X = \sqrt{RND}$ $\qquad f(x) = 2x$

$F(x) = x^2$

medián: $x^2 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ várható érték: $\int_0^1 x \cdot 2x\,dx = \frac{2}{3}$

$x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

példa: (X, Y) $\qquad f(x,y)$

$z = t(x,y)$

$Z := t(X,Y)$ $\qquad E(Z) = \iint_{R^2} t(x,y) \cdot f(x,y)\,dx\,dy$

$\left(\text{pl: } E(X \cdot Y) = \iint_{R^2} xy\, f(x,y)\,dx\,dy\right)$

$y = k(x)$

$Y \approx k(X)$

$E(|Y - k(X)|) = \min$

$= \iint |y - k(x)| \cdot f(x,y)\, dx\, dy = \min$ $=$

$y = k(x) = ?$

$\to f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$

$(X_1, Y_1)(X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$

$$\frac{|Y_1 - k(X_1)| + |Y_2 - k(X_2)| + \dots + |X_N - k(Y_N)|}{N} \approx$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} |y - k(x)|\, f_{2|1}(y|x)\, dy \right) dx$$

$fix\ x$ mellett

a $k(x)$ konstanstól vett

eltérés abszol. értékeinek

várható értéke

} ez min., ha $k(x)$ a feltételes eloszlás medianj

$k(x)$: $F_{2|1}(y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{2|1}(y|x)\, dy$

$v = F_{2|1}(y|x) = \frac{1}{2}$

$k(x) = \left[\underbrace{F_{2|1}^{-1}(y|x)}_{y} \right]_{v = \frac{1}{2}}$

$k(x) = ?$ $\quad E\left((Y - k(X))^2 \right) = \min$

$= \iint_{R^2} (y - k(x))^2 \cdot \underbrace{f(x,y)}_{f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_1(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (y - k(x))^2 f_{2|1}(y|x)\, dy}_{fix\ x} \right) dx$

ez min., ha $k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{2|1}(y|x)\, d$

feltételes várható érték

(X, Y) $\quad x = k(y) = ?$

$E(|X - k(Y)|) = \min$, ha $k(y) = \left[F^{-1}_{1|2}(u|y)\right]_{u=\frac{1}{2}}$

$E\left((X - k(Y))^2\right) = \min$, ha $k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{1|2}(x|y)\, dy$

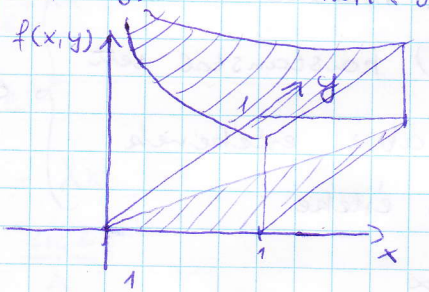
példa: $X = RND_1 \qquad Y = X \cdot RND_2 = RND_1 \cdot RND_2$

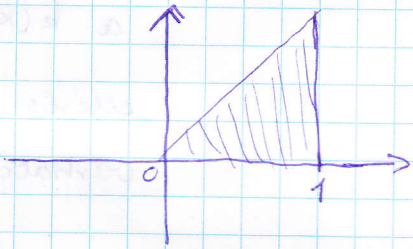
Y-ból tippelünk X-re

$X \quad f_1(x) = 1 \qquad (0 \le x \le 1)$

$X = x$ feltétel mellett $Y = X \cdot RND_2 \quad f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x} \quad (0 \le y \le x)$

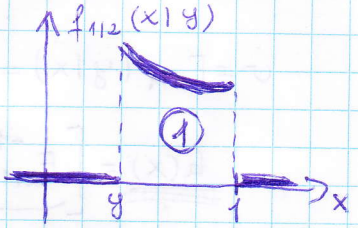
$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x} \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x$





$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_y^1 \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln\right]_y^1 = -\ln y \qquad (0 < y < 1)$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\ln y} \qquad (y < x < 1)$$



$$F_{1|2}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{1|2}(x|y)\, dx = \int_y^x \frac{\frac{1}{x}}{-\ln y}\, dx = \frac{\left[\ln x\right]_{x=y}^{x=x}}{-\ln y} = \frac{\ln(x) - \ln(y)}{-\ln y} = \frac{1}{2}$$

$(y < x < 1)$

ezt kell x-re megoldani

$$\ln x - \ln y = -\frac{1}{2}\ln y$$

$$\ln x = \frac{1}{2}\ln y \Rightarrow \ln\sqrt{y}$$

$$x = \sqrt{y} \quad \rightarrow \quad k(y) = \sqrt{y} \text{ fv.-el kell tippelni}$$

b, ha a négyzetest akarjuk: $\int_y^1 x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{-\ln y}\, dx = \frac{1-y}{-\ln y} \qquad (0 < y < 1)$

$$k(y) = \frac{y-1}{\ln y} \qquad (0 < y < 1)$$

(X,Y) $\quad y = ax + b$

$a = ?$ $\quad b = ?$

$Y \sim (aX + b)$ $\quad E\left(\left(Y-(aX+b)\right)^2\right) = \min$ → számolások után

$a_0 = \ldots\ldots$

$b_0 = \ldots\ldots$

$y = a_0 x + b_0$ regressziós egyenes

$$\frac{y - m_2}{\sigma_2} = r\frac{x - m_1}{\sigma_1}$$

↓

korrelációs együttható

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

$$y = m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1) = \underbrace{\frac{cov}{\sigma_1^2}}_{a_0} x + \underbrace{\left(m_2 - \frac{cov}{\sigma_1^2} m_1\right)}_{b_0}$$

$$r \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Házi feladatok:

1, (X,Y) $\quad f(x,y) = \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{2} - \frac{y}{3}}$ $\quad (x>0, y>0)$

a, $f_1(x) = ?$ milyen eloszlás? $E(X) = ?$

$$\int_0^\infty \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{2} - \frac{y}{3}}\, dy = \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{3}}\, dy = \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{2}} \left[-3e^{-\frac{y}{3}}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} [0-1] = \frac{1}{2} e$$

Exponenciális eloszlás, $E(X) = m = \frac{1}{\lambda} = 2$

b, $f_2(y) = ?$ milyen eloszlás? $E(X) = ?$

$$\int_0^\infty \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{2} - \frac{y}{3}}\, dx = \frac{1}{6} e^{-\frac{y}{3}} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \frac{1}{6} e^{-\frac{y}{3}} \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty = -\frac{1}{3} e^{-\frac{y}{3}} [0-1] = \frac{1}{3} e^{-}$$

Exponenciális eloszlás, $E(X) = m = \frac{1}{\lambda} = 3$

c, A második a jobb, annak nagyobb a várható értéke

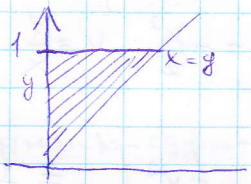
$X = \boxed{RND_1} \cdot RND_2 \qquad Y = RND_1$

ha $e_1 = y$

$f_2(y) = 1 \qquad 0 \le y \le 1$

$\hookrightarrow f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{y} \qquad 0 \le x \le y$ ~~$0 \le y \le x$~~ egyenletes eloszlás $0-x$ között

$f(x,y) = \frac{1}{y}$ határok:



$$f_1(x) = \int_x^1 \frac{1}{y}\,dy = [\ln y]_x^1 = 0 - \ln x \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\frac{1}{y}}{-\ln x} \qquad x \le y \le 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

X-ből tippelünk Y-ra $\quad y = k(x)$ fv.-el : $Y \sim k(X)$

hiba: $Y - k(X)$

$E(|\text{hiba}|) = E(|Y - k(X)|) = \min \quad k(X)$

$E(\text{hiba}^2) = E((Y - k(X))^2) = \min \quad k(X)$

Medián hely $\quad F_{2|1}(y|x) = \frac{\ln y - \ln x}{-\ln x} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \sqrt{x}$

várható értékkel $\quad \int_x^1 y \frac{\frac{1}{y}}{-\ln x}\,dy = \frac{1-x}{-\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$

$y = h(x) = ax + b$ $\quad a = ?$ $\quad b = ?$

$$a = \frac{cov}{\sigma_1^2} \qquad b = m_2 - \frac{cov}{\sigma_1^2} m_1$$

$$m_1 = \int_0^1 x \cdot f_1(x)\, dx = \int_0^1 -x \cdot \ln x \, dx = \left[-\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$u' \quad v$

$$u = -\frac{x^2}{2} \qquad v' = \frac{1}{x}$$

$$= 0 - \left[-\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

vaqq: $E(x) = E(RND_1 \cdot RND_2) = E(RND_1) \cdot E(RND_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$m_2 = E(RND_1) = \frac{1}{2} \qquad (Y = RND_1)$$

σ_1^2 : $E(X^2) = E(RND_1^2 \cdot RND_2^2) = E(RND_1^2) \cdot E(RND_2^2)$

$$E(RND_1^2) = \int_0^1 z^2 \cdot 1 \, dz = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_1^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{16-9}{144} = \frac{5}{144}$$

(B/4)

covariancia : $E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

$$E(X \cdot Y) = \iint_{R^2} xy\, f(x,y)\, dy\, dx = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=y} xy\, f(x,y)\, dx \right) dy =$$

$\int_{x=0}^{x=y} xy\, f(x,y)\, dx = \frac{1}{y}$

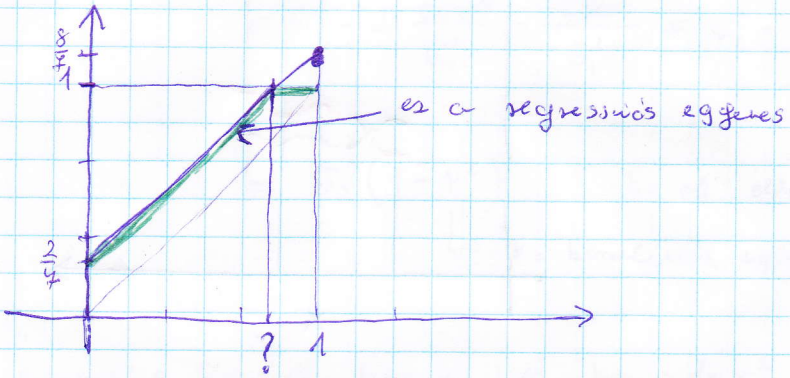
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\, dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$cov = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$a = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{7}{144}} = \frac{144}{24} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$b = \frac{1}{24} - \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$$

Regressziós egyenes grafikonja:



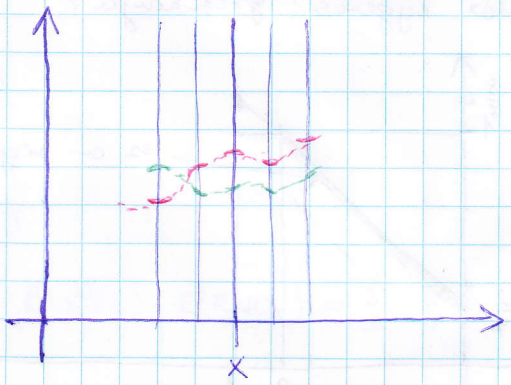
→ a legjobb ezt használni (egy törött vonal)

11. 19. 11. Előadás

Kiegészítés múltkori előadáshoz:

(X, Y) $f(x,y)$

$y = k(x) = ?$ $E(|Y - k(X)|) = \min$ $k(x)$ = felt. eloszlás mediánja



$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$F_{2|1}(y,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{2|1}(y|x)\,dy$$

$$F_{2|1}(y|x) = \frac{1}{2}$$

$$y = k(x)$$

$E((Y - k(x))^2) = \min$ $k(x) = -\text{''}-$ várható értéke $y = k(x)$

$y = k(x) = ax + b$ $E((Y - (aX + b))^2) = \min$ $a = \frac{cov}{\sigma_1^2}$ $b = m_2 - \frac{cov}{\sigma_1^2} m_1$

biz: $cov := E((X - m_1)(Y - m_2)) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$r = \frac{cov}{\sigma_1 \sigma_2}$ → korreláció együttható

$h(a,b) := \sim = E(Y^2) + a^2 E(X^2) + b^2 - 2aE(XY) - 2bE(Y) + 2abE(X)$

$$\frac{\partial h}{\partial a} = 2aE(X^2) - 2E(XY) + 2bE(X) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} = 2b - 2E(Y) + 2aE(X) = 0$$

$$E(X^2)a + E(X)b = E(XY)$$

$$E(X)a + b = E(Y)$$

Krámer-szabállyal:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} E(XY) & E(X) \\ E(Y) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(X^2) & E(X) \\ E(X) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(X^2) - (E(X))^2} = \frac{cov}{\sigma_1^2}$$ ✓

$b =$ ugyan így

$$E\left(\left(Y-(aX+b)\right)^2\right) = E\left(\left(Y-\left(\frac{cov}{\sigma_1^2}X + m_2 - \frac{cov}{\sigma_1^2}m_1\right)\right)^2\right) =$$

$$= E\left(\left(\underbrace{(Y-m_2)}_{\sigma_2^2} - \frac{cov}{\sigma_1^2}(X-m_1)\right)^2\right) =$$

$$= \sigma_2^2 - 2\frac{cov}{\sigma_1^2}\cdot \underbrace{E\left((Y-m_2)(X-m_1)\right)}_{cov} + \frac{cov^2}{(\sigma_1^2)^2}\underbrace{E\left((X-m_1)^2\right)}_{\sigma_1^2} =$$

$$= \sigma_2^2 - 2\frac{cov^2}{\sigma_1^2} + \frac{cov^2}{\sigma_1^2} = \sigma_2^2 - \frac{cov^2}{\sigma_1^2} = \sigma_2^2\left(1-\frac{cov^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right) =$$

$$= \sigma_2^2(1-r^2)$$

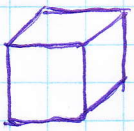
Ez ad elsőrendű hiba négyzetének várható értéke

↳ r = korrelációs együttható

- Az optimális lineáris becslés jó, ha: $1-r^2$ kicsi, ~~ezzel~~ ezzel r^2 nagy, azaz $|r|$=nagy, $\left(\sigma_2^2(1-r^2) \geq 0 \rightarrow r^2 \leq 1 \rightarrow |r| \leq 1\right)$ (de közel legyen 1-hez) ezzel X és Y kapcsolata szoros.

- Ha X és Y kapcsolata laza, akkor $1-r^2$ ~~is~~ nagy, r^2 kicsi, $|r|$=kicsi, (

A korrelációs együttható abszolút értéke a val. változók szorosságának erejét méri.

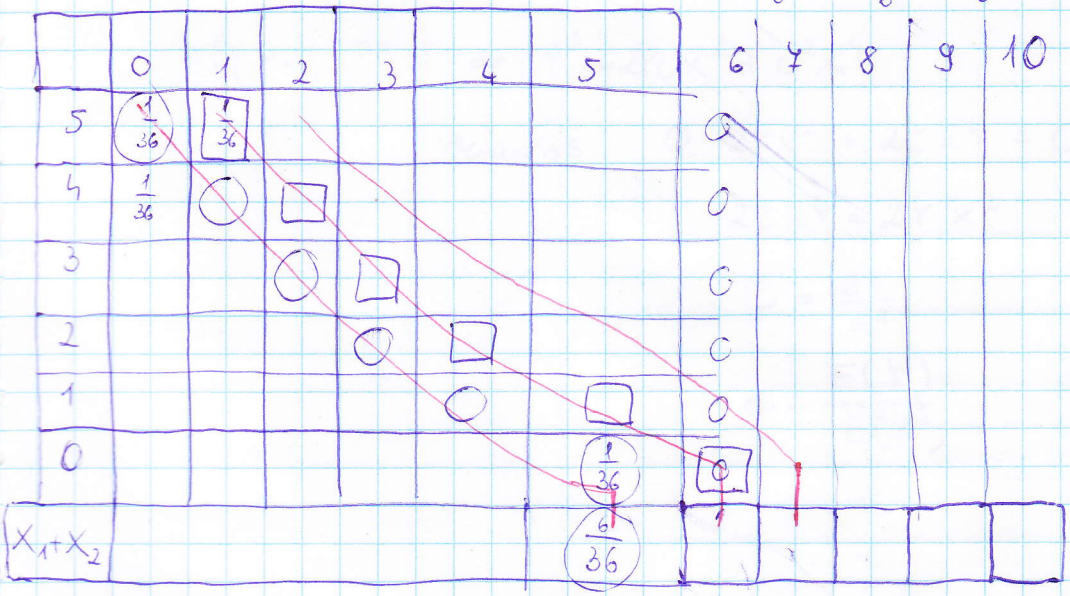
Kísérlet: 

dobókocka: X_1:

0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. dobókocka: X_2:

0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



11. 21.

10. Gyakorlat

előző HF. 1. feladatának b része

X-ből Y-ra tipp

$$\left(y = \underset{\downarrow}{E(Y)} + \frac{cov(X,Y)}{\underset{\downarrow}{\sigma^2(X)}} \cdot (X - \underset{\downarrow}{E(X)}) \right)$$

m_2 $\quad$ m_1

$X = A_1 + A_2$

$Y = A_1$

$$y = \underset{\downarrow}{E(Y)} + \frac{cov(X,Y)}{\sigma^2(X)} \cdot (X - E(X))$$

m_1

$\sigma^2(X) \to \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

$cov(X,Y) \to E\left([X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)] \right)$ (most $A_1 + A_2$, $m_1 + m_2$, A_1, m_1)

$= E\left([(A_1 - m_1) + A_2 - m_2] \cdot [A_1 - m_1] \right)$

$E\left((A_1 - m_1)^2 + (A_1 - m_1)(A_2 - m_2) \right)$

$\underbrace{E\left((A_1 - m_1)^2\right)}_{\sigma_1^2} + \underbrace{E\left((A_1 - m_1)(A_2 - m_2)\right)}_{cov(A_1, A_2) = 0}$

$m_1 \to m_1 + m_2$

$$y = m_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot (X - (m_1 + m_2))$$

Konvolúció: független val. változókat összeadunk

kísérlet: dobókockával, első 6-osig dobunk, 2 kockával

milyen eloszlást követ az összeg?

$X =$

$Y =$

$Z = X + Y$

5	$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$				
4	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$				
3	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$				
2	$\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2$		
1	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$		
	1	2	3	4	5

konvolúció:

1 $\quad$ 2 $\quad$ 3 $\quad$ 4 $\quad$ 5

0 $\quad$ $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ $\quad$ $2\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2$ $\quad$ $3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$ ...

$$(m-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{m-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$r(z) = \sum_{\substack{(x,y):\\ x+y=z}} p_1(x)\cdot p_2(y) = \sum_x p_1(x)\, p_2(z-x) = \sum_y p_1(z-y)\, p_2(y)$$

$$r(n) = \sum_{\substack{(i,j):\\ i+j=n}} p_1(i)\, p_2(j) = \sum_i p_1(i)\cdot p_2(n-i) = \sum_{i=n-j} p_1(n-j)\, p_2(j)$$

bankétan itt ezzel hasonlóra:

$r(z) =$

$$r(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}(n-1)$$

$n-i \geq 1$

$i \leq n-1$

nem függ i-től

Zét Poisson konvolúciója:

λ_1 - Poisson ☆ λ_2 - Poisson = ?

↓ konvolúció jele

$j \geq 0$, $n-j \geq 0$

$$r(n) = \text{(harmadik képletből)} = \sum \frac{\lambda_2^j}{j!} e^{-\lambda_2} \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_1^{n-j}}{(n-j)!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^j}{j!} e^{-\lambda_2}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \lambda_2^j \lambda_1^{n-j} =$$

$\frac{n!}{j!(n-j)!} = \binom{n}{j}$

nevezetes szumma: $(a+b)^n$ (binomiális-tétel)

↳ $(\lambda_1+\lambda_2)^n$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Poisson eloszlást kaptunk $(\lambda_1+\lambda_2)$ paraméterrel.

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

számolás nélkül, csak gondolkodva:

λ_1 - Poisson ✡ λ_2 - Poisson



→ Hány hívás egész nap? ez is Poisson

(összeg várható értéke = várható értékek összege) $\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2$

Hány hívás d.e. Poisson $\lambda_1 = E(X)$

Hány hívás d.u. Poisson $\lambda_2 = E(Y)$

Folytonos eset:

X $f_1(x)$
Y $f_2(y)$
} függetlenek

$Z = X + Y$

$r(z) = ?$

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \underbrace{f_2(y)}_{f_2(z-x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy$$

példa: 2 izzó

λ_1 - par. exp eloszlással ✡ λ_2 - par. exp. eloszlással

$$r(z) = \int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)} dx = \int_0^z \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 (z-x)} dx =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \int_0^z e^{-\lambda_1 x + \lambda_2 x} dx = \quad (e^{x(\lambda_2 - \lambda_1)})$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \left[\frac{e^{x(\lambda_2 - \lambda_1)}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_0^z = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \frac{e^{z(\lambda_2 - \lambda_1)} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z} \right) \qquad z \geq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ → $r_2(z) = \lambda^2 e^{-\lambda z} \cdot z$ Másodrendű gamma eloszlás λ-paraméterrel.

$r_3(z) =$ ezek konvolúciója

$f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$

$f_2(y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \cdot y \quad (y \geq 0)$

$$r_3(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \lambda^2 e^{-\lambda y} \cdot y \, dy = \lambda^3 \int_0^z e^{-\lambda z + \lambda y - \lambda y} \cdot y \, dy$$

$$= e^{-\lambda z} \lambda^3 \frac{1}{2} \left[y^2 \right]_0^z = \frac{1}{2} \lambda^3 e^{-\lambda z} \cdot z^2 \qquad (z \geq 0)$$

$$r_4(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \cdot \frac{1}{2} \lambda^3 e^{-\lambda y} \cdot y^2 \, dz = \frac{1}{2} \lambda^4 e^{-\lambda z} \int_0^z y^2 \, dy =$$

$$= \frac{1}{3!} \lambda^4 z^3 e^{-\lambda z} \qquad (z \geq 0)$$

$$r_n(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n z^{(n-1)} e^{-\lambda z}$$

n-ed rendű, λ-par. gamma eloszlás eloszlásfüggvénye.

Élettartamok, várakozási időknél jön elő.

11.26. 12. előadás

Szórásnégyzet : második momentum $-(\bar{v}.\bar{e})^2$

2 dimenziós standard normális eloszlás

A korrelációs együttható $= 0 \Rightarrow$ függetlenek egymástól a koordinátáik

↳ az összeadandó vektorok legyenek függetlenek:

az összegre adódó pontfelhő normális lesz.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \underline{b} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} X &= a_{11}u + a_{12}v + b_1 \\ Y &= a_{21}u + a_{22}v + b_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{X = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u} + \underline{b}}$$

$$\boxed{E(X) = \underline{\underline{A}} \cdot E(u) + \underline{b}}$$

Kovariancia:

↳ $cov(X,Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Kovarianciamátrix:

$\underline{X}$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \sigma^2(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & \sigma^2(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= E\Big((\underline{X} - E(\underline{X})) \cdot (\underline{X} - E(\underline{X}))^T\Big) = E(\underline{X}\underline{X}^T) - E(X)E(X^T)$$

$(X - E(X))(X - E(X))$	$(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))$
...	...

$\underline{X} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}$ ($+b \rightarrow$ de kiesne a számításoknál során, ezért le sem írjuk)

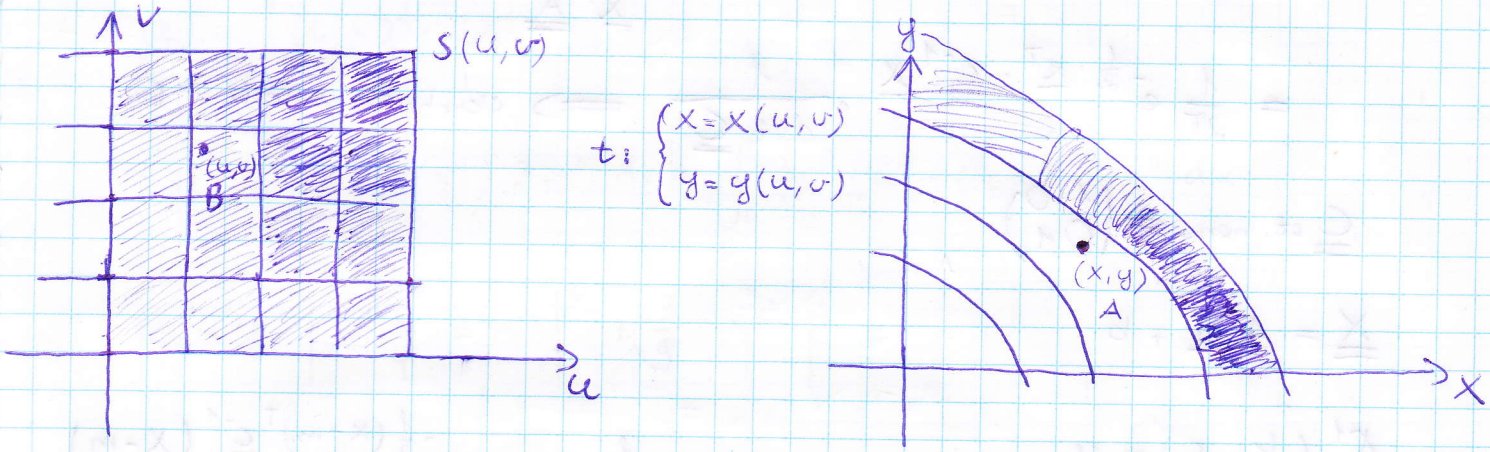
$$\underline{\underline{C}}_{\underline{X}} = E\left((\underline{X} - E(\underline{X}))(X^T - E(X)^T) \right) =$$

$$= E\left(\underline{\underline{A}} (\underline{u} - E(\underline{u})(\dots)^T \right) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}_{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{A}}^T$$

kiemelhető, mert konstans

$$\underline{\underline{C}}_{\underline{X}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}_{u} \cdot \underline{\underline{A}}^T$$

$$\underline{\underline{C}}_{új} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}_{régi} \cdot \underline{\underline{A}}^T$$



$$f(x,y) = \frac{\text{A-n lévő tömeg}}{\text{A területe}} = \frac{\text{B-n lévő tömeg tér.}}{\text{B területe}} = \frac{\text{B területe}}{\text{A területe}}$$

$$S(u,v) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right|$$

$u = u(x,y)$

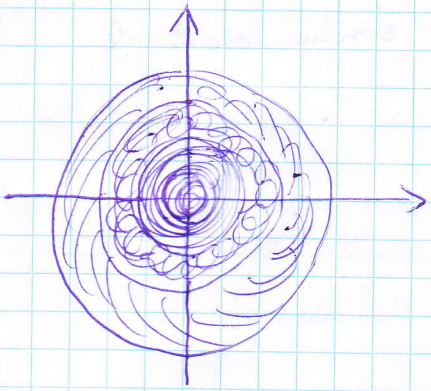
$v = v(x,y)$

$$\underline{X} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u} \qquad \underline{u} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{X}$$

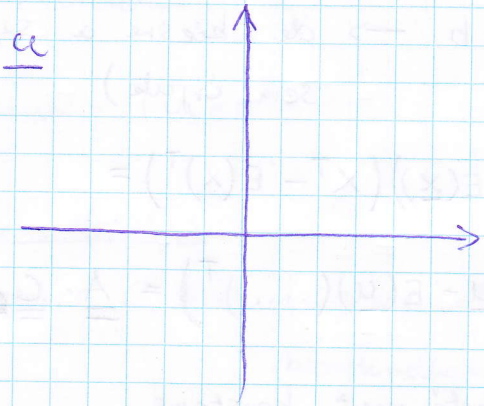
$$F(\underline{X}) = \underline{1}\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{X} \right) \cdot \left| \det\left(\underline{\underline{A}}^{-1} \right) \right|$$

2 dim. standard norm. eloszlás

$$s(\underline{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$



$\underline{X} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}$



$u^2 + v^2 = (u, v)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underline{u}^T \cdot \underline{u}$

$$f(x) = \underline{s}(\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{X})\left|\det(A^{-1})\right| = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\overbrace{(\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{X})^T \cdot (\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\underline{X})}^{\underline{X}^T\underline{\underline{A}}^{-1^T}}} \left|\det(\underline{\underline{A}}^{-1})\right| =$$

$$\underline{X}^T(\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^T)^{-1}\cdot\underline{X}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\cdot\underline{X}^T\cdot\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{X}} \cdot \frac{1}{\det\underline{\underline{C}}} \Longrightarrow \text{várható érték} = 0$$

$\underline{\underline{C}}$ st. norm $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{X} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u} + b$

$\underline{\underline{A}}^{-1}(Y - \underline{s}) = \underline{u}$

$\underline{m}$ = új várható érték $= \underline{b}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\underline{\underline{C}}}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T\underline{\underline{C}}^{-1}(\underline{X}-\underline{m})}$$

H.F. 2/ ℓ - mennyien mentek át , $p = 0,9$

$$P(A+B=\ell) = P(A=\ell-B) = \sum_{\in B} P(A=\ell-b\ (B=b)) =$$

$$= \sum_{\in B} P(A=\ell-b)\cdot P(B=b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{200} P(A=\ell-i)\ P(B=i) =$$

ez egy binomiális eloszlás

$$= \sum_{i=1}^{200} \binom{\ell-i}{150} p^{\ell-i}(1-p)^{150-\ell+i} \cdot \binom{i}{200} p^i (1-p)^{200-i} =$$

$$= \sum_{\delta=1}^{200} \binom{\ell-i}{150}\cdot\binom{i}{200} p^\ell (1-p)^{350-\ell} =$$

11.28. 11. Gyakorlat

$$cov(X,Y) = E(XY) - \underbrace{E(X)E(Y)}_{\downarrow 1.5 \quad \downarrow 1.7} \rightarrow 2.6 - 2.55 = 0.05$$

$$E(XY) = 0.1 \cdot 2 \cdot 1 + 0.2 \cdot 1 \cdot 1 + 0.3 \cdot 1 \cdot 2 + 0.4 \cdot 2 \cdot 2 = 2.6$$

$Z = Y - X = (-X) + Y \quad r(z) = ?$

$-X \quad f_1(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \quad (x<0)$

$Y \quad f_2(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \quad (y>0)$

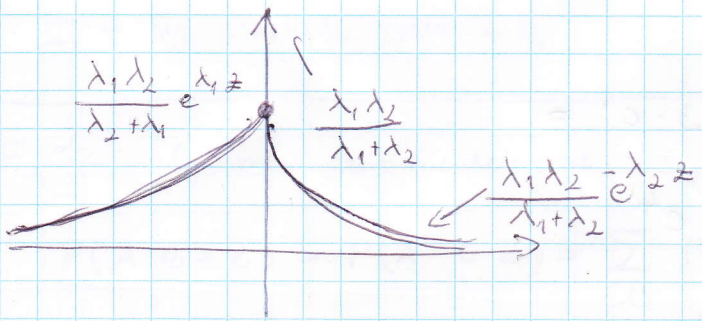
$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)\,dx \overset{1}{=} \int_{-\infty}^{0} \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)}\,dx = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-\lambda_1 z} \quad (z \geq 0)$$

1 $x<0$ $\quad z-x>0$

1 $z \geq 0$ $\quad x<z$

2 $z \leq 0$

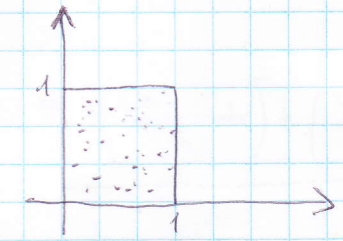
$$r(z) \overset{2}{=} \int_{-\infty}^{z} \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)}\,dx = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{\lambda_1 z} \quad (z \leq 0)$$

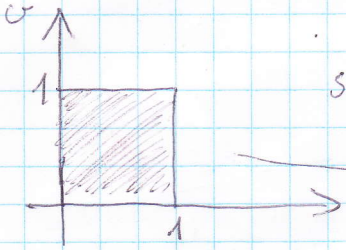


$Z = Y - X$ sűr. fv-e

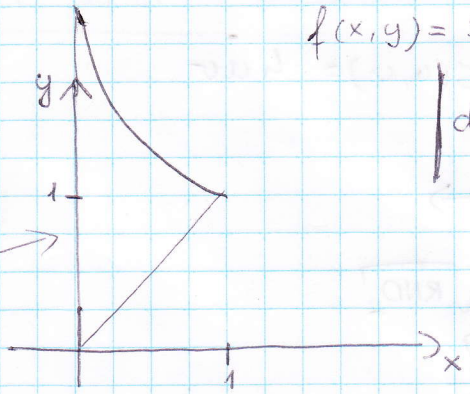
$|Z|$ sűr. fv-e : $z>0 \quad \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(e^{-\lambda_1 z} + e^{-\lambda_2 z}\right)$

1, (RND_1, RND_2)





$s(u,v) = 1$



$$f(x,y) = s(u(x,y), v(x,y)) \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right|$$

↑ jakobi-mátrix

$$X = RND_1 \cdot RND_2$$

$$Y = \frac{RND_2}{RND_1}$$

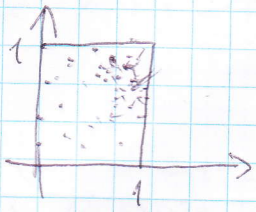
$$t: \begin{cases} x = u \cdot v \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{x}{y}} = x^{+\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \\ v &= \sqrt{xy} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

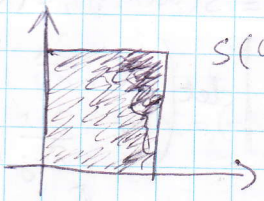
$$= \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} x \end{pmatrix}$$

$$\det = \frac{1}{4} y^{-1} + \frac{1}{4} y^{-1} = \frac{1}{2y}$$

$$f(x,y) = 1 \cdot \frac{1}{2y}$$

2. $(\sqrt{RND_1}, \sqrt{RND_2})$





$s(u,v) = 4uv$

$X = \sqrt{RND_1}, \sqrt{RND_2}$

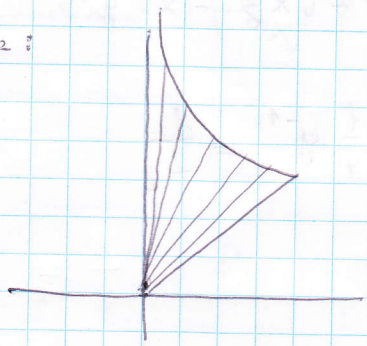
$Y = \dfrac{\sqrt{RND_1}}{\sqrt{RND_2}}$

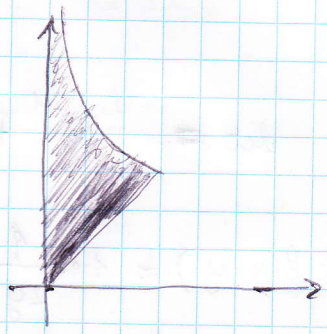
minden számolás jó az előzőek alapján, egyedül $s(u,v)=4uv$ változott

$$f(x,y) = 4\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{2y} = 4x\frac{1}{2y} = 2\frac{x}{y}$$

mikor lesz $2\frac{x}{y} = const$?

a szintvonalak most ilyenek lesznek:





2-dim norm. eloszlás

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \underline{\underline{C}}}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m})^T \cdot \underline{\underline{C}}^{-1}(\underline{x}-\underline{m})}$$

$$\underline{x}-\underline{m} = \begin{pmatrix} x-m_1 \\ y-m_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c \\ c & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \qquad \det \underline{\underline{C}} = \sigma_1^2\sigma_2^2 - c^2$$

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - c^2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -c \\ -c & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_2^2 \cdot (x-m_1)^2 + \sigma_1^2 \cdot (y-m_2)^2 - 2c(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - c^2} = \quad \sigma_1^2\sigma_2^2 \text{-nel osztunk}$$

$$= \frac{\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\frac{c}{\sigma_1\sigma_2}\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)}{1-\left(\frac{c}{\sigma_1\sigma_2}\right)^2} =$$

↓ behelyettesítés egyszerűsíthető

$$= \frac{(\quad)^2 + (\quad)^2 - 2(\quad)(\quad)}{1-r^2}$$

$$\sqrt{\det \underline{\underline{C}}} = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - c^2} = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2}}$$

12.03. 13. Előadás

jeggybeírás: utolsó gyakon, pótzh-n, gyakjón-n
12.12. szerda 12.14 péntek 16.00

gyakorlás a 2. zh-ra:

2006. 12. 13 (2 zh. pótzh-ja)

1, 0-1 között véletlen szám 3-ik hatványának
a, eloszlásfv.
b, szórás

$X = RND^3$ $(0 < RND < 1 \rightarrow 0 < RND^3 < 1)$ → csak $0<x<1$ között kell megadni az eloszlásfv.-t

a, $F(x) = P(X<x) = P(RND^3 < x) = P(RND < \sqrt[3]{x}) =$ $0 < \sqrt[3]{x} < 1$

$= \sqrt[3]{x}$ (mivel egyenletes eloszlásfv. volt.)

$f(x) = F'(x)$

$F(x) = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

b, szórás? → szórásnégyzet = 2. mom. − (v. é)^2

$$(v.é) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$2.\text{mom.} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^{\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{16-7}{7\cdot 16} = \frac{9}{112}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{9}{112}}$$

1. feladat b, mc 2:

E(x):

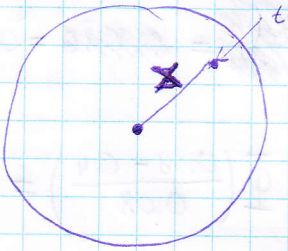
$$E(RND^3) =$$

$$E(t(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{t(x)}_{\text{a köbre emelés}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\text{RND sűrűségfv.-e}} dx = \int_0^1 x^3 \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

2. mom:

$$E\left((RND^3)^2\right) = E(RND^6) = \int_0^1 x^6 \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

2, kör alakú céltábla, a találat egyenletes eloszlást követ



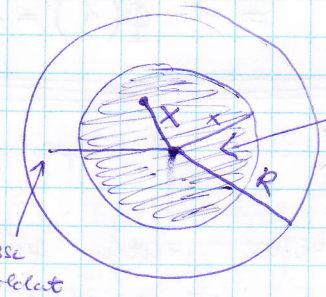
$X :=$ a találat távolsága a kp.-tól

a, $f(x) = ?$

b, $E(x) = ?$

a, $F(x) = P(X < x) =$

$$= \frac{\text{ter(kedvező halmaz)}}{\text{ter(teljes tér)}} = \frac{x^2\pi}{R^2\pi} = \frac{x^2}{R^2}$$



$$f(x) = F'(x) = \frac{2x}{R^2}$$

b, $$E(x) = \int_0^R x \cdot \frac{2x}{R^2} \, dx = \frac{2}{R^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{3}R$$

3, izzó élettartama $\lambda = 2.5$ exp. eloszlású

mennyi a valósége, hogy 25 izzó élettartamának átlaga nagyobb, mint 0

$X :=$ $\lambda = 2.5$ exp. $\quad E(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2.5} = 0.4$

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{25}}{25} > 0.48\right) = ?$$

≈ 0.4

ez már normális eloszlást fog követni

m = a.é. az átlagnak $= \frac{25 \cdot 0.4}{25} = 0.4$

σ = szórása az átlagnak

σ^2 = — " — $= \frac{1}{25^2}$ (25 exp. eloszlás szórásnégyzete)

$$E(X^2) = \int_0^\infty \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{v'} dx = \left[x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx =$$

$u' = 2x \quad v = -e^{-\lambda x}$

$$\frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx}_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$$

exp. szórásnégyzet $= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

szórás $= \frac{1}{\lambda} = 0.4$

a normális eloszlás számítása: $\sigma^2 = \frac{1}{25^2}$ (25 · exp. szórásnégyzete) =

$= \frac{0.4^2}{25} = 0.0064$

$\sigma = 0.08$

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots X_{25}}{25} > 0.48\right) = 1 - P(\dots < 0.48) = 1 - \Phi\left(\frac{0.48 - 0.4}{0.08}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84 = 0.16$$

2006. dec. 08 (zh2 B csoport)

1, Két 0-1 közötti véletlen szám (egyenletes eloszlás) összegének

a, szórása b, eloszlásfv.-e

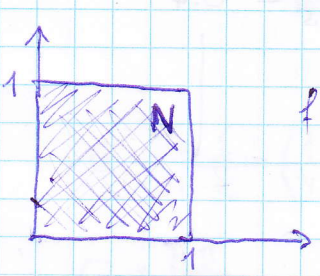
$X = RND_1$

$Y = RND_2$ függetlenek

a, $\sigma^2(X+Y) = \underbrace{\sigma^2(X)}_{\frac{1}{12}} + \underbrace{\sigma^2(Y)}_{\frac{1}{12}}$ a függetlenség miatt $= \frac{1}{6} \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{6}}$

$$L = \int_0^1 x^2 1 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

b,

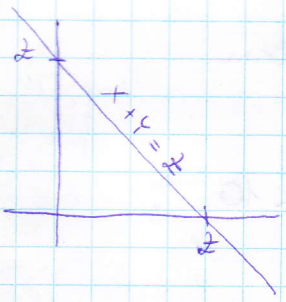


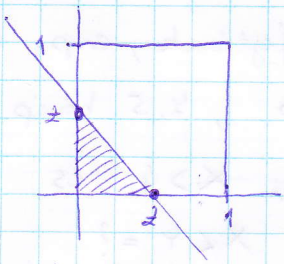
$f(x,y) = 1 \quad (x,y) \in N$

valószínűség $= \frac{\text{ter (kedvező)}}{\text{ter (összes)}}$

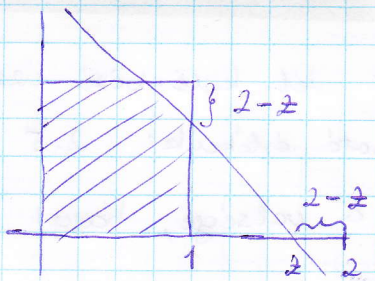
$Z = X + Y$

$$R(z) = P(X+Y < z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & (0 < z < 1) \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & (1 < z < 2) \end{cases}$$





$(0 < z < 1)$



2, Egy rendelőben abc-ben vizes zsemlét, császárzsemlét összekevernek

2x annyi vizes van, mint császár

50 db-ot vesznek

mi a valósége, hogy a császárzsemlék száma 10 és 20 közé esik?



$P(\text{vizes}) = \frac{2}{3}$

$P(\text{császár}) = \frac{1}{3}$

$n = 50$

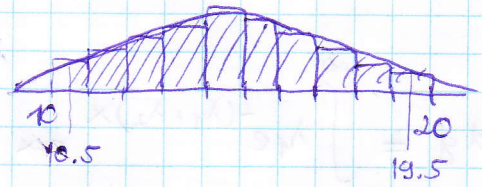
X_i = császárzsemlék száma → BINOMIÁLIS $n=50$ $p=\frac{1}{3}$

NORM.: $m = n \cdot p$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

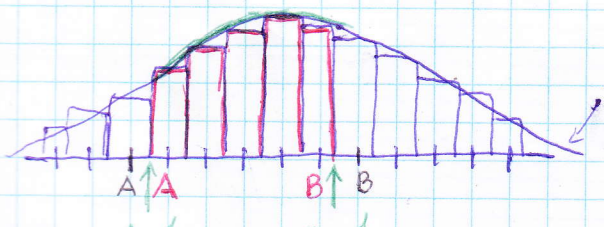
$m = \frac{50}{3}$ $\quad \sigma = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$

$$P(10 < X < 20) = \Phi\left(\frac{19.5 - \frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{10.5 - \frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right)$$



(ha $P(10 \le X \le 20)$-t vesznénk, akkor nem 10.5 és 19.5, hanem 9.5 és 20.5)

oka: binomiális eloszlás:



közelítés normális eloszlással

$A - \frac{1}{2}$ $\quad B + \frac{1}{2}$

$A + \frac{1}{2}$ $\quad B - \frac{1}{2}$

$P(A \le X \le B)$ $\quad \Phi\left(\frac{B + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{A - \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right)$

$P(A < X < B)$ $\quad \Phi\left(\frac{B - \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{A + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right)$

3, X, Y két különböző izzó, függetlenek, exp. élettartam várható értékeik: 2.5 hónap, 7.5 hónap

Mi a valósége, hogy a, $X > 4$ és $7 < Y < 10$

b, $X < Y = ?$

függetlenek $\begin{cases} X & \text{exp.} \quad E(X) = 2.5 \quad \lambda_1 = \frac{1}{2.5} = 0.4 \\ Y & \text{exp.} \quad E(X) = 7.5 \quad \lambda_2 = \frac{1}{7.5} = 0.13\dot{3} \end{cases}$ $\qquad F(X) = 1 - e^{-\lambda x}$

a, $P(X>4 \text{ és } 7<Y<10) = P(X>4) \cdot P(7<Y<10) = \left(1 - \underbrace{F_1(4)}_{1-e^{-0.4\cdot 4}}\right)\left(\underbrace{F_2(10)}_{1-e^{-0.13\cdot 10}} - \underbrace{F_2(7)}_{1-e^{-0.13\cdot 7}}\right)$

(mert függetlenek)

b, $P(X<Y) = \iint_A \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\, dx\, dy = \int_0^\infty \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \underbrace{\int_0^y \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, dx}_{1-e^{-\lambda_1 y}} \right) dy =$

$$= \int_0^\infty \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} - \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2) y} \right) dy =$$

$$= 1 + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2) y} \right]_0^\infty = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

(a határértékek miatt)

fordítva integrálva:

$$\int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \underbrace{\left(\int_x^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\, dy \right)}_{e^{-\lambda_2 x}} dy = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\, dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$