MATEMATIKA A2 elővizsga

2014 december 15.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Legyenek $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ páronként merőleges vektorok a $\mathbf{V}$ euklideszi térben. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}, \mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}, \mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}$ vektorok?

2. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \quad \text{ahol} \quad a \neq 0 \quad \text{és} \quad k > 0 \quad \text{valós számok.}$$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, dx \, dy.$$

4. Feladat. Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4+y^4}$$

5. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Milyen irányban létezik és mennyi az iránymenti derivált az origóban?

1. Feladat. Legyenek $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ páronként merőleges vektorok a $\mathbf{V}$ euklideszi térben. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}, \mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}, \mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}$ vektorok?

1. Megoldás. Legyenek α, β, γ skalárok, melyekre (2p)

$$\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})+\beta(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z})+\gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z})=\mathbf{0}.$$

Ha megmutatjuk, hogy ebből $\alpha, \beta, \gamma = 0$ következik (1p), akkor a kérdésre a válasz: igen (1p). Az egyenletet rendezve kapjuk (1p)

$$(\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{x}+(\alpha+\beta-\gamma)\mathbf{y}+(\alpha-\beta-\gamma)\mathbf{z}=\mathbf{0}.$$

Mivel $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ páronként merőleges vektorok, ezért ha a fenti egyenletet skalárisan szorozzuk az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ majd $\mathbf{z}$ vektorokkal, akkor sorra kapjuk, hogy (3p)

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma&=0\\ \alpha+\beta-\gamma&=0\\ \alpha-\beta-\gamma&=0. \end{aligned}$$

Az első és a harmadik egyenletet összeadva kapjuk $\alpha = 0$, majd $\beta, \gamma = 0$ adódik (2p).

---

2. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \quad \text{ahol} \quad a \neq 0 \quad \text{és} \quad k > 0 \quad \text{valós számok.}$$

2. Megoldás. Akár a hányados-, akár a gyökkritériummal próbálkozhatunk.
Gyökkritériummal (1p):

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{1p}{=} \sqrt[n]{\left|\frac{n^k}{a^n}\right|} \overset{2p}{=} \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{|a|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{|a|}.(2p)$$

Ha $|a| < 1$, akkor a sor divergens (1p), ha $|a| > 1$, akkor a sor abszolút konvergens (1p), ha $|a| = 1$, akkor a gyökkritériummal nem tudjuk eldönteni, de az eredeti sorba akár $a = 1$-et (1p), akár $a = -1$-et (1p) írva nyilvánvalóan divergens, mert a tagok nem tartanak 0-hoz.

---

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\ dx\ dy.$$

3. Megoldás. Az integrandus az adott tartományon folytonos, tehát az integrál létezik (1p). Az e^{x^2} függvénynek nincs elemi függvényekkel kifejezhető primitív függvénye. Ha a tartományon fordított sorrendben integrálunk (1p),

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\ dx\ dy \stackrel{2p}{=} \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\ dy\ dx \stackrel{2p}{=} \int_0^1 \left[ye^{x^2}\right]_0^x dy \stackrel{2p}{=} \int_0^1 xe^{x^2} dx \stackrel{2p}{=} \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

---

4. Feladat. Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4+y^4}$$

4. Megoldás. A tengelyeken tartva az origóhoz, nulla jön ki (1p). A kifejezés szimmetriája sugallja, hogy nézzük meg az $x = y$ esetet (4p). Ekkor a kifejezés $\frac{x^2}{2x^4} = \frac{1}{2x^2}$ (3p), ami végtelenhez tart, ha x tart nullához (1p). A függvénynek tehát nincs határértéke az origóban (1p).

---

5. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Milyen irányban létezik és mennyi az iránymenti derivált az origóban?

5. Megoldás. Tekintsük a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ irányt (2p). Ennek a vektornak az abszolút értéke 1 (1p), így (3p)

$$\lim_{h\to0+} \frac{(h^2\cos^2\alpha + h^2\sin^2\alpha)\sin\frac{1}{h^2\cos^2\alpha+h^2\sin^2\alpha} - 0}{h} \stackrel{2p}{=} \lim_{h\to0} h\sin\frac{1}{h^2} \stackrel{1p}{=} 0$$

Tehát minden irányban létezik az iránymenti derivált az origóban, és az 0 (1p).