Valószínűségszámítás vizsga dolgozat
Műszaki informatika szak
2012. május 23.

1. Egy automata gép 2 kg liszt feliratú zacskókba adagol X mennyiségű lisztet, ahol $X \in N(m,\ 0,002)$ eloszlást követ. Minőségi követelmény az, hogy 99% legyen annak a valószínűsége, hogy a zacskó liszt-tartalma nem kevesebb 2 kg-nál. Mennyire állítsák m-et, hogy ez teljesülhessen?

   Megoldás: $\mathbf{P}(X<2) = F_X(2) = \Phi\left(\frac{2-m}{0{,}002}\right) = 0,01$. Felhasználva, hogy $\Phi(-t) = 1-\Phi(t)$, $1-\Phi\left(\frac{m-2}{0{,}002}\right) = 0,01 \Longrightarrow 0,99 = \Phi\left(\frac{m-2}{0{,}002}\right) \approx \Phi(2,33)$.
   Tehát $\frac{m-2}{0{,}002} \approx 2,33$, ahonnan $m \approx 2 + 0,002 \cdot 2,33 = 2,00466$.

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	$2p$	p	$7p$
1	$5p$	$10p$	$25p$

   Mekkora a p paraméter értéke? Függetlenek-e X és Y? $\operatorname{cov}(X,Y) = ?$

   Megoldás: $50p = 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{50}$.
   X, Y nem függetlenek, mert pl.
   $\frac{1}{25} = \mathbf{P}(X=-1, Y=-1) \neq \mathbf{P}(X=-1) \cdot \mathbf{P}(Y=-1) = \frac{7}{50} \cdot \frac{1}{5}$.
   $\mathbf{E}X = -\frac{7}{50} + \frac{32}{50} = \frac{1}{2}, \mathbf{E}Y = -\frac{1}{5} + \frac{4}{55} = \frac{3}{5}$,
   $\mathbf{E}XY = \frac{2}{50} - \frac{7}{50} - \frac{5}{50} + \frac{25}{50} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$.
   $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

3. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right) & \text{, ha } x,y \in (0,1) \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}.$$

   Számolja ki, az $\mathbf{E}(X \mid Y=y)$ regressziós függvényt!

   Megoldás: $f_X(y) = f_Y(y) = \int_0^1 \frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right) dx = \frac{12}{5}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2} + y^2 x\right]_0^1 = \frac{4}{5} - \frac{6y}{5} + \frac{12y^2}{5}, y \in (0,1)$.
   $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{6x^2-6xy+6y^2}{2-3y+6y^2}, x, y \in (0,1)$.
   $\mathbf{E}(X \mid Y=y) = \int_0^1 x \cdot \frac{6x^2-6xy+6y^2}{2-3y+6y^2} dx = \frac{1}{2-3y+6y^2}\left[\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 y + 3x^2 y^2\right]_0^1 = \frac{3-4y+6y^2}{4-6y+12y^2}, y \in (0,1)$.

4. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 100 darab független és azonos eloszlású valószínűségi változó összege a $[0,40]$ intervallumba esik, ha egy ilyen változó eloszlása a $[0,1]$ intervallumon egyenletes?

   Megoldás: A centrális határeloszlás tételből tudjuk, hogy
   $\frac{\bar{X}_{100}-\mathbf{E}X}{\sigma X}\cdot 10 \sim N(0,1)$, ahol $\mathbf{E}X=\frac{1}{2}, \boldsymbol{\sigma}X=\frac{1}{\sqrt{12}}$.
   $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \le 40\right) = \mathbf{P}\left(\bar{X}_{100}\le 0,4\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X}_{100}-\mathbf{E}X}{\sigma X}\cdot 10 \le -\sqrt{12}\right) \approx \Phi\left(-\sqrt{12}\right) \approx 0$

5. Tekintsük a $\{0,1\}$ állapotterű,

$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

   átmenetvalószínűség-mátrixszal adott Markov-láncot! $\mathbf{P}(X_0=0)=1$. Mi a 0 állapotban való tartózkodás idejének eloszlása és várható értéke?

   Megoldás: Jelölje Z a 0 állapotban tartózkodás idejét.
   $\mathbf{P}(Z=0)=\mathbf{P}(X_1=1 \mid X_0=0)=0,8$
   $\mathbf{P}(Z=1)=\mathbf{P}(X_1=0 \mid X_0=0)\cdot\mathbf{P}(X_2=1 \mid X_1=0)=0,2\cdot 0,8$
   $\mathbf{P}(Z=2)=\mathbf{P}(X_1=0 \mid X_0=0)\cdot\mathbf{P}(X_2=0 \mid X_1=0)\cdot\mathbf{P}(X_3=1 \mid X_2=0)=(0,2)^2\cdot 0,8$
   $\mathbf{P}(Z=k)=(0,2)^k\cdot 0,8,\ k=0,1,2,3,...$
   $\mathbf{E}Z=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(0,2)^k\cdot 0,8 = 0,2\cdot\frac{1}{0,8}=\frac{1}{4}$.

6. Ismertesse az egymintás u-próbát! (Mik az előzetes feltételek, mi a nullhipotézis, mi a próbastatisztika, hogyan döntünk?)

   Megoldás: Adott $X_1, X_2, ..., X_n \in N(m,\sigma_0)$statisztikai minta, ahol $\sigma_0>0$ ismert. A nullhipotézis az, hogy $m=m_0$, ahol m_0 ismert. A próbastatisztika: $\frac{\bar{X}_n-m_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\in N(0,1)$.
   Döntés: a nulhipotézist elfogadjuk, ha $\left|\frac{\bar{X}_n-m_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\right| < u_\varepsilon$, ahol $\Phi(u_\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{2}$.