ANALÍZIS(2) — **II. ZÁRTHELYI** — **2006. április 20.**

Mérnök Informatikus szak — B kurzus — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (8 pont)

$$f(n+1) = 4\,f(n) - 3\,f(n-1)$$

a) Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!

b) Adja meg az $f(0) = 2$, $f(1) = 6$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást?

a.) Tudjuk, hogy van $f(n) = q^n$ $(q \neq 0)$ alakú megoldás:

$q^{n+1} = 4q^n - 3q^{n-1}$; (2) $q \neq 0 \Rightarrow q^2 = 4q - 3$

$\Rightarrow q^2 - 4q + 3 = (q-1)(q-3) = 0 \Rightarrow q_1 = 1,\ q_2 = 3$ (2)

Az összes megoldás: $f(n) = C_1 + C_2 3^n$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (2)

b.) $f(0) = 2$ $\quad C_1 + C_2 = 2$

$f(1) = 6$ $\quad C_1 + 3C_2 = 6$ $\Big\} \Rightarrow C_2 = 2,\ C_1 = 0$

Tehát $f(n) = 2 \cdot 3^n$ (2)

2. feladat (10 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (2x)^n}{\sqrt{n}\ 5^n}$$

Adja meg a sor konvergencia tartományát és abszolút konvergencia tartományát!

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^n}{\sqrt{n}\ 5^n}\, x^n = \sum_1^{\infty} a_n x^n$$

(4)

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}\ 5} = \frac{2}{5} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{5}{2}$, $x_0 = 0$

$x \in (-R, R) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ -ben a sor abszolút konv., mert a hatványsor egy tanult tétel miatt ilyen

$-\frac{5}{2}$ $\quad 0 \quad$ $\frac{5}{2}$ (1)

$x = \frac{5}{2}$: $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konv. (Leibniz sor) (1), de nem abszolút konvergens $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$ (1)

$x = -\frac{5}{2}$: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$ (1)

K.T. : $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ (1) $\quad$ A.K.T. : $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (1)

an2 z2 060420/1.

3. feladat (10 pont)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)\, x^{2k}$$

Írja fel a sor összegfüggvényét és határozza meg a sor konvergenciasugarát!

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)\, x^{2k}$$

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)\, x^{2k}\,dx =$$

$[0,x] \subset (-R,R) \Rightarrow$ a hatványsor tagonként integrálható

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (2k+1)\, x^{2k}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) \left.\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|_0^x =$$ (2)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k+1} \;(2)\; = \frac{x^3}{1-x} \;(2)$$ és $R=1$ (1) $\Rightarrow$ az eredeti hatványsora is $R=1$ (1)

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(x)\,dx = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)' = \frac{3x^2(1-x) - x^3(-1)}{(1-x)^2} \;(2)$$

és $R=1$

4. feladat (12 pont)

Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{-3x}$, $\quad x_0 = 2$

b) $g(x) = x^3\, e^{-3x}$, $\quad x_0 = 0$

$g^{(100)}(0) = ?$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots = \sum_{0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\,; \quad u \in \mathbb{R}$$

$\boxed{5}$ a.) $f(x) = e^{-3x} = e^{-3(x-2)-6} = e^{-6} e^{-3(x-2)} =$

$$= e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3(x-2))^n}{n!} = e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} (x-2)^n$$

$x \in \mathbb{R}$

$\boxed{7}$ b.) $$e^{-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} x^n \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^3 \sum_{0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^{n+3} = \sum_{k=3} a_k x^k$$

$x \in \mathbb{R}$

$$a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow g^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

$$\Rightarrow g^{(100)}(0) = 100!\, \underbrace{a_{100}}_{x^{100} \text{ együtthatója}} = 100!\, \frac{(-3)^{97}}{97}$$

an2 zz 06042012.

5. feladat (15 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 + x^4}}$$

a) Írja fel az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!

b) $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Határozza meg az integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt nyolcadfokú Taylor-polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

a.) $(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} u^n \; ; \quad R=1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{16}}} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{x^4}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{x^4}{16}\right)^n = \quad 5$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{16^n}x^{4n} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{-1/2}{1}\frac{1}{16}x^4 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}\frac{1}{16^2}x^8 + \right.$$
$$\left. + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{6}\frac{1}{16^3}x^{12} + \dots\right.$$

R_f: $\left|\frac{x^4}{16}\right| = \frac{|x|^4}{16} < 1 \Rightarrow |x| < 2$, tehát $R_f = 2$ 2

b.) $[0,1] \subset (-2,2)$: szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{16^n}x^{4n}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\binom{-1/2}{n}\frac{1}{16^n}x^{4n}dx = \frac{1}{4}\int_0^1\Big(\underbrace{1 - \frac{1}{32}x^4 + \frac{3}{8\cdot16^2}x^8}_{T_8(x)} -$$

$$- \frac{5}{2^4\,16^3}x^{12} + \dots\Big)\,dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{32}\frac{x^5}{5} + \frac{3}{8\cdot16^2}\frac{x^9}{9} - \frac{5}{2^4\,16^3}\frac{x^{13}}{13} + \dots\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{160} + \frac{3}{72\cdot16^2} - \frac{5}{2^4\cdot16^3\cdot13} + \dots\right) \; 5 \approx \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{160} + \frac{3}{72\cdot16^2}\right) \; 1$$

Leibniz sor

$$|H| < \frac{1}{4}\,\frac{5}{16^4\cdot13} \quad 2$$

an2 22060420/3.

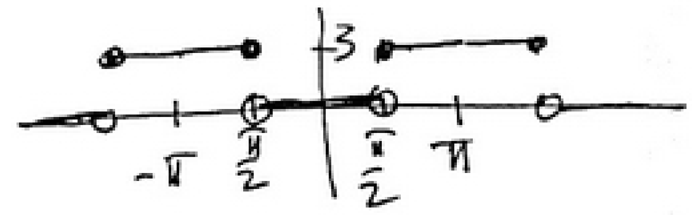
6. feladat (12 pont)

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ)!

$$f(x) = \begin{cases} 3\,, & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \\ 0\,, & \text{ha } x \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2\pi)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\phi(x) = ?$

f páros $\Rightarrow$ $b_k = 0$; $k = 1, 2, \ldots$ 2



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{ps}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 0\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\,3\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \quad 2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos kx}_{ps}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 3\cos kx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\,3\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{6}{\pi k}\left(\underbrace{\sin k\pi}_{=0} - \sin k\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{6\sin k\frac{\pi}{2}}{\pi k} \quad 4$$

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx + \underbrace{b_k\sin kx}_{=0}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{6}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \ldots\right) \quad 2$$

$\phi(x) = f(x)$, ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ és $\phi\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \neq f(x)$

2

7. feladat (9 pont)

$$f(x, y) = \frac{e^{3y}}{x^4 + 1}$$

a) $f'_x(x, y) = ?\,, \qquad f'_y(x, y) = ?$

b) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = ?$, ha $\quad \underline{e} \parallel 2\,\underline{i} - 3\,\underline{j}$

a.) $f_x' = \dfrac{-4x^3}{(x^4+1)^2}\, e^{3y}$ 2 ; $f_y' = \dfrac{1}{x^4+1}\, e^{3y} \cdot 3$ 2

grad f mindenütt $\exists$, mert f_x', f_y' mindenütt $\exists$ és folyt.

b.) $\underline{v} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$; $|\underline{v}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $\Rightarrow$ $\underline{e} = \frac{2}{\sqrt{13}}\underline{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j}$

$\boxed{5}$

anz z2060420/4.

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = \operatorname{grad} f(1,0)\cdot \underline{e}$$

$$\operatorname{grad} f(1,0) = f_x'(1,0)\,\underline{i} + f_y'(1,0)\,\underline{j} = -\underline{i} + \frac{3}{2}\underline{j}$$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = \left(-\underline{i} + \frac{3}{2}\underline{j}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\underline{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j}\right) = \frac{-2}{\sqrt{13}} - \frac{9}{2\sqrt{13}}$$

8. feladat (17 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?

b) Írja fel az f_x' és f_y' függvényeket, ahol azok léteznek! (Az origóban a definícóval dolgozzon!)

a.) $\boxed{5}$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x^2}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\sin\frac{1}{x^2+y^2}}_{\text{korlátos}} = 0 = f(0,0)$$

Tehát f folytonos az origóban

b.) $\boxed{12}$ $$f_x' = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\,\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \ \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x'(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}-0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{h}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\sin\frac{1}{h^2}}_{\text{korlátos}} = 0$$

$$f_y' = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\,\dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y'(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

an2 z20060420/5

9. feladat (7 pont)

$g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\dfrac{2x}{y^2+1}$ -et és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x,y)$ -nal!

$$f'_x(x,y) = ?\,, \qquad f'_y(x,y) = ?\,, \qquad f''_{xy}(x,y) = ?$$

$$f(x,y) = g\left(\frac{2x}{y^2+1}\right)$$

$$f_x' = g'\left(\frac{2x}{y^2+1}\right) \cdot \frac{2}{y^2+1} \quad 2$$

$$f_y' = g'\left(\frac{2x}{y^2+1}\right) 2x \frac{-2y}{(y^2+1)^2} \quad 2$$

$$f_{xy}'' = g''\left(\frac{2x}{y^2+1}\right) 2x \frac{-2y}{(y^2+1)^2} \cdot \frac{2}{y^2+1} + g'\left(\frac{2x}{y^2+1}\right) \frac{-2\cdot 2y}{(y^2+1)^2} \quad 3$$

Pótfeladat (csak az elégségeshez):

10. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+6}$, $x_0 = 0$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x-5}$, $x_0 = 2$

a.) $\boxed{5}$

$$f(x) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{-x^2}{6}} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{6}\right)^3 + \dots\right) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{6}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}x^{2n}$$

$$K.T.: \ |q| = \left|-\frac{x^2}{6}\right| = \frac{|x|^2}{6} < 1 \ \Rightarrow |x| < \sqrt{6}$$

b.) $\boxed{5}$

$$g(x) = \frac{1}{x-5} = \frac{1}{(x-2)-3} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{x-2}{3} + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^3 + \dots\right) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}(x-2)^n$$

$$K.T.: \ |q| = \left|\frac{x-2}{3}\right| < 1 \ \Rightarrow |x-2| < 3$$

$$x \in (-1, 5)$$

an2 220604206