ANALÍZIS(2) TÉTELEK

BME, VIK, Mérnök Informatikus szakos hallgatói részére, BSC

(A * -gal jelöltek bizonyításait nem kérdezzük.)

I. Differenciálegyenletek

(1) * Szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása.
(2) Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.
(3) Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak.
(4) Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. (Két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek).
(5) * Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyik megoldása megkereshető a konstans variálás módszerével.
(6) Új változó bevezetése elsőrendű differenciálegyenletbe.
(7) Partikuláris megoldás lokális vizsgálata a differenciálegyenlet hez tartozó iránymezőben, az izoklinák módszere.
(8) A differenciálegyenlet megoldásait közelítő Taylor polinomok számolása.
(9) * n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.
(10) * n-edrendű homogén lineáris diff.egy. megoldásainak tere n-dimenziós.
(11) n-edrendű homogén lineáris, konstans együtthatós differenciálegyenletnek létezik $e^{\lambda x}$ alakú megoldása (karakterisztikus polinom).
(12) * Ha egy valós együtthatós n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek megoldása a $z(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, ahol y_1, y_2 valós, akkor y_1 és y_2 is megoldások.
(13) * n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. (Két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek).
(14) * n-edrendű inhomogén lineáris diff.egyenlet partikuláris megoldásának keresése speciális zavarófüggvény esetén próbafüggvénnyel.
(15) * Fizikai és geometriai alkalmazások.

II. Lineáris rekurziók

(1) * Lineáris rekurzív egyenlet megoldásainak a tere.
(2) * Fibonacci tipusú egyenletek megoldásának egyértelműsége.
(3) * Fibonacci sorozat.(A rekurzió feloldása.)

III. Numerikus és függvénysorok

(1) A sor abszolút konvergenciájából következik a sor konvergenciája.
(2) Majoráns, minoráns kritérium.
(3) Hányados kritérium.
(4) * Hányados kritérium limeszes alakja.
(5) Gyök kritérium.
(6) * Gyök kritérium limeszes alakja.
(7) Függvénysor egyenletes konvergenciájából következik a pontonkénti konvergencia.
(8) Egyenletesen konvergens függvénysor teljesíti a Cauchy kritériumot.
(9) * Ha a függvénysor teljesíti a Cauchy kritériumot, akkor egyenletesen konvergens.
(10) Az egyenletes és abszolút konvergencia elégséges feltéle (Weierstrass kritérium).

IV. Hatványsorok

(1) * Egy adott pontban konvergens hatványsor tulajdonsága.
(2) * Egy adott pontban divergens hatványsor tulajdonsága.
(3) * Hatványsor konvergenciatartománya intervallum.
(4) Formulák az R konvergenciasugárra $0 < R < \infty$ esetén.
(5) * Formulák az R konvergenciasugárra $R = 0$ és $R = \infty$ esetén.
(6) * Hatványsor abszolut és egyenletes konvergenciája.
(7) * Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.
(8) * Hatványsor összegfüggvényének integrálja.
(9) * Hatványsor tagonkénti deriválásával nyert sor konvergencia sugara.
(10) * Hatványsor összegfüggvényének deriválhatósága, a derivált hatványsora.
(11) A függvényt n-ed rendben érintő, legfeljebb n-ed rendű polinom egyértelműsége (Taylor polinom).
(12) Hatványsor alakban adott függvény Taylor sora. (Kapcsolat egy analitikus függvény és az a_k együtthatók között.)
(13) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$
(14) * Lagrange féle maradéktag alakja.
(15) A geometriai sorból levezethető Taylor sorok.
(16) $\ln(1+x), \arctan x$ függvények megegyeznek a Taylor soraikkal a $(-1, 1)$-on.
(17) Elégséges feltétel függvény és Taylor sorának egyenlőségére.
(18) Az e^x, $\sin x$, $\cos x$, sh$x$ és a ch$x$ függvény megegyezik a Taylor sorával a $(-\infty, \infty)$-on.
(19) Binomiális sor konvergencia tartományának sugara.
(20) * Binomiális sor összegfüggvénye.
(21) $f(x) = \arcsin x$ függvény megegyezik a Taylor sorával a $(-1, 1)$-on.
(22) Alkalmazások: függvényérték, integrál közelítő értékének számolása, a hiba becslése, határérték meghatározása.

V. Fourier sorok

(1) * A trigonometrikus rendszer ortonormáltsága, függetlenség.
(2) Az egyenletesen konvergens trigonometrikus sor együtthatóinak egyértelműsége. (Kapcsolat a ϕ összegfüggvény és az a_k, b_k együtthatók között.)
(3) A Fourier együtthatók kiszámítása.
(4) Összeg, konstansszoros Fourier sora.
(5) Páros és páratlan függvény Fourier sora.
(6) * Elegséges feltétel Fourier sor egyenletes konvergenciájára.
(7) * Dirichlet tétel (Fourier sor pontonkénti konvergenciája.)

VI. Többváltozós függvények folytonossága

(1) * n-dimenziós euklideszi tér pontsorozatainak koordinátánkénti konvergenciája.
(2) Többváltozós függvények limesze. Az átviteli elv alkalmazása (példák).
(3) * Többváltozós folytonos függvényekből összetett függvény folytonossága.
(4) * Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai (W. I., W. II., egyenletes folyt.).

VII. Többváltozós függvények differeciálhatósága

(1) Többváltozós függvény totális differenciálhatóságának és a folytonosságának a kapcsolata. (Tot. diffh.-ból következik a folytonosság, de a folytonosságból nem következik a tot. diffh.)
(2) Többváltozós függvény totális differenciálhatóságának és a parciális deriváltak létezésének a kapcsolata. (Tot. diffh.-ból következik a parciális deriváltak létezése, de a parciális deriváltak létezéséből nem következik a tot. diffh..)
(3) * A differenciálhatóság elégséges feltétele (parciális deriváltak folytonossága).
(4) Kétváltozós függvény grafikonjának (felület) érintősíkja.
(5) * Többváltozós függvények differenciálására vonatkozó láncszabály. (m-változósba egyváltozóst vagy két-három változósba két-három változóst helyettesítve.)
(6) Iránymenti derivált meghatározása (elégséges feltétel).
(7) A maximális illetve a minimális iránymenti derivált iránya és nagysága. (A gradiensvektor iránya és nagysága.)
(8) * Young tétel.
(9) Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.
(10) * Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele (m=2).
(11) * Kompakt tartományon folytonos függvény abszolút szélsőértékének a számolása.

VIII. Többváltozós függvények integrálja

(1) * Kettős integrál és kétszeres integrál kapcsolata téglalapon.
(2) * Kettős integrál és kétszeres integrál kapcsolata normáltartományokon.
(3) * Kettős és hármas integrál transzformációja (polár, henger és gömbi koordináták).
(4) * $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx$ meghatározása.
(5) * Kettős és hármas integrál gyakorlati alkalmazása (terület, térfogat).

IX. Komplex változós komplex értékű függvények

(1) * Komplex függvény folytonossága.
(2) * Komplex $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény differenciálhatóságának szükséges és elégséges feltétele(Cauchy-Riemann egyenletek és $u$ill. v totális diff.hatósága).
(3) Komplex $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény differenciálhatóságának elégséges feltétele(Cauchy-Riemann egyenletek és u'_x, u'_y ill. v'_x, v'_y folytonossága).
(4) * Ha f reguláris egy pontban, akkor ott léteznek az $u(x, y) = Re(f(z))$ és $v(x, y) = Im(f(z))$ magasabb rendű parciális deriváltjai.
(5) Ha f reguláris, akkor az $u(x, y) = Re(f(z))$ és $v(x, y) = Im(f(z))$ megoldásai a síkbeli Laplace egyenletnek ($g''_{xx} + g''_{yy} = 0$), azaz u és v harmónikus.
(6) * Ha az $u(x, y)$ harmónikus, akkor létezik harmónikus társa, azaz létezik olyan f reguláris függvény hogy $u(x, y) = Re(f(z))$ és létezik $v(x, y)$, hogy $v(x, y) = Im(f(z))$.
(7) * Ha a $v(x, y)$ harmónikus, akkor létezik olyan f regulárisfüggvény hogy $v(x, y) = Im(f(z))$, azaz létezik $u(x, y)$, melynek $v(x, y)$ harmónikus társa.
(8) Az e^z periódikussága, értékkészlete.
(9) Az $\ln z$ értelmezési tartománya, értékkészlete, értékének meghatározása. (Az $\ln z$ valós és képzetes része.)
(10) e^z regularitása, deriváltja.
(11) Az $\sin z$, $\cos z$ értékének meghatározása. (A valós és képzetes részük.)
(12) A $\sin z, \cos z$ illetve a $\sinh z, \cosh z$ közötti kapcsolatok.
(13) * Komplex függvény görbe menti integráljának számolása:

$$\int_L f(z)\, dz \ = \ \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

.

(14) * A Cauchy-Goursat féle alaptétel. (Reguláris függvény zárt görbe menti integrálja egyszeresen összefüggő tartományon nulla.)
(15) * A Cauchy-Goursat féle alaptétel következményei.
(16) $(z - z_0)^{-1}$ körintegrálja.
(17) $(z - z_0)^n$ körintegrálja (n=-2,-3,-4, ...).
(18) * Cauchy-féle integrálformula. (Reguláris függvény integrál alakja).
(19) * Cauchy-féle integrálformulák. (Reguláris függvény deriváltjainak integrál alakja).

Érvényes: 2008, tavaszi félév.

Fritz Józsefné, Kónya Ilona, Tasnádi Tamás

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

ANALÍZIS 2 – Diffegyenletek:

→ ELSŐRENDŰ DIFF. EGYENLET

(D) Elsőrendű implicit differenciálegyenlet:

$$F(y', y, x) = 0$$

mindenképp benne van

- Elsőrendű explicit: $y' = f(x,y)$ kifejezhető
- Cauchy/kezdetiérték probléma: $y' = f(x,y)$ $y(x_0) = y_0$

(D) – Diffegyenlet megoldásfüggvénye: grafikonja megoldásgörbe

$\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ $(a<b)$ differenciálható fv. ha

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in (a,b)\text{-ra}$$

- Cauchy probléma megoldásfüggvénye: grafikonja: Cauchy probléma megoldásgörbéje

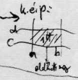
φ, ha $\exists$ $(a,b) \subset \mathbb{R}$, hogy

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \ \forall x \in (a,b)\text{-re és } \begin{matrix} x_0 \in (a,b) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{matrix}$$

→ SZÉTVÁLASZTHATÓ VÁLTOZÓJÚ DIFFEGYENLETEK:

(1)* $y' = f(x) \cdot g(y)$. $f \in C^0_{(a,b)}$, $g \in C^0_{(c,d)}$

megoldása: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\, dx$.



→ HOMOGÉN ÉS INHOMOGÉN ELSŐRENDŰ LIN.:

$y' + g(x) \cdot y = 0$ $g \in C^0_{(\alpha,\beta)}$

(2) Homogén lineáris elsőrendű diff1elet mo.-i lin. teret alkotnak

(Bizonyítandó: összeadás $\varphi + \psi$, skalárral szorzás $c \cdot \varphi$ nem vezet ki)

- $\varphi' + g \cdot \varphi = 0$, $\forall x \in (\alpha,\beta)$ $\psi' + g \cdot \psi = 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$

Σ $\varphi' + \psi' + g(\varphi + \psi) = 0$

$(\varphi + \psi)' + g(\varphi + \psi) = 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$

- $c \cdot \varphi' + c \cdot g \cdot \varphi = 0$

$(c \cdot \varphi)' + g \cdot (c \cdot \varphi) = 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$

(3) Homogén lin. elsőrendű diff1elet mo.-i 1 dimenziós lin. teret alkotnak

$$\left(\int \frac{dy}{y} = -\int g(x)\,dx \right) \to y = C \cdot e^{-G(x)}, C \in \mathbb{R} \quad y = C \cdot \underbrace{\varphi(x)}_{\text{sose nulla mert e-ad fv.}}$$ ✓

$y' + g(x) \cdot y = f(x)$ $g, f \in C^0_{(\alpha,\beta)}$

(4) Inhomogén lin. elsőrendű diff1elet ált. megoldásainak alakja:

Segédtétel: (I) 2 megoldásának különbsége megoldása (H)-nak:

(I) • $y_1' + g \cdot y_1 = f$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$ • $y_2' + g \cdot y_2 = f$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$

Kül: $y_1' - y_2' + g(y_1 - y_2) = 0$; $(y_1 - y_2)' + g(y_1 - y_2) = 0$ (H)-nak megoldása ✓

Legyen $y_H = y_1 - y_2$, ekkor $y_1 = y_H + y_2$

$y_1 := y_{I\,ált}$ általános mo. $y_2 := y_{Ip}$ → konkrét mo. $\}$ $\boxed{y_{I\,ált} = y_{H\,ált} + y_{Ip}}$ segédtétel miatt $\forall$ megoldás kijön belőle. ✓

(5)* Inhomogén lin. elsőrendű diff1elet partikuláris megoldása mindig megtalálható a konstans variálás módszerével!

$y_p = C(x) \cdot \varphi_H(x)$ (lederiválva, behelyettesítve I-be)

→ ÚJ VÁLTOZÓ BEVEZETÉSE:

(6) Új változó bevezetése: . . .

→ IRÁNYMEZŐ, IZOKLINÁK:

(7) Partikuláris megoldás lokális vizsgálata a diff1elethez tartozó iránymezőben; az izoklinák módszere:

$y' = f(x,y)$ diff1elet.

$f(x,y) = k$ izoklinák $y' = 0 = k$ izoklina vizsgálata.

$y'' \gtrless 0$ . . .

(8) A diff1elet megoldásait közelítő Taylor polinomok számolása:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{\varphi(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{\varphi'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{\varphi^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

→ MAGASABBRENDŰ LIN. DIFFEGYENLETEK:

(9)* n-edrendű homogén lin. diff1elet mo.-i lin. teret alkotnak

(10)* ——— 11 ——— nak a tere n-dimenziós.

(11) n-edrendű homogén lineáris, konstans együtthatós diff1egyenletnek létezik $e^{\lambda x}$ alakú megoldása: $y = e^{\lambda x}$ $(y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x})$

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0 \quad e^{\lambda x} \neq 0:$$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$ karakterisztikus egyenlet

(12)* Ha egy valós együtthatós n-edrendű homogén lin. diff1egyenletnek megoldása a $z(x) = y_1(x) + i \cdot y_2(x)$ ahol y_1, y_2 valós, akkor y_1, y_2 is megoldások.

(13)* n-edrendű inhomogén lin. diff1elet általános mo.-ának alakja:

$y_{iá} = y_{Há} + y_{ip}$ (Ha y_1, y_2 partikuláris megoldás, akkor $(y_1 - y_2)$ megoldása a homogénnek)

(14)* n-edrendű inhomogén lin. diffegyenlet partikuláris megoldásának keresése speciális zavarófüggvény esetén próbafüggvénnyel

- $K \cdot e^{\alpha x}$ $\longrightarrow$ $y_{ip} = A \cdot e^{\alpha \cdot x}$
- $a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 \longrightarrow y_{ip} = B_m x^m + \ldots + B_0$
- $K_1 \sin\alpha x / K_2 \cos\alpha x \longrightarrow y_{ip} = A \cdot \sin\alpha x + B \cdot \cos\alpha x$

Külső rezonancia (ha szerepel a homogén megoldásban)

→ LINEÁRIS REKURZIÓK:

(D) Rekurzió: $f(n) = F(f(0), f(1), \ldots, f(n-1))$

- Lin. rek.: $f(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(n-i)$.

(1)* Lin. rek. egyenlet megoldásainak a tere: lineáris teret alkotnak: $q^n = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2}$

(2)* Fibonacci típusú egyenletek megoldásának egyértelműsége:

$f(n) = \alpha q_1^n + \beta \cdot q_2^n$ lin. komb. a mo. ← belátható, h. összes mo.

(3)* Fibonacci sorozat (a rekurzió feloldása):

$f(n) = 1 \cdot f(n-1) + 1 \cdot f(n-2)$

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2} \overset{q \neq 0}{\Rightarrow} q^2 = q^1 + 1 \to q^2 - q - 1 = 0 \quad q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ANALÍZIS 2 – Numerikus és függvénysorok:

(1) Sor absz. konv. ⟹ sor konvergens:

Biz.: $\sum^{\infty}|a_n|$ konv. ⟹ Cauchy-kritérium:
$|a_{n+1}+\ldots+a_{n+k}| \leq ||a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+k}|| < \varepsilon$ ha $n>M(\varepsilon)$, $k\in\mathbb{N}^+$ ✓

(2) • Majoráns krit.:
ha $0<a_n\leq c_n$ $\forall n$-re és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konv. ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. (vagy $n\geq N_0$)

Biz.: $S_n^a \leq S_n^c \leq K$ ⟹ S_n^a korlátos és pozitív tagú a sor ⟹ ✓

• Minoráns krit.:
ha $0\leq d_n\leq a_n$ $\forall n$-re és $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ div. ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div. (vagy $n\geq N_0$)

Biz.: $S_n^a \geq S_n^d \to\infty$ ⟹ $S_n^a\to\infty$ (spec. rendőrelv) ✓

(3) Hányados krit.:
$\forall n$-re $a_n>0$ és 1) $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1$ ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. (vagy $n\geq N_0$)
2) $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq q\geq 1$ ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

Biz 1): $a_{n+1}\leq q a_n\leq\ldots\leq q^n a_1$ ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}a_1$ konv. majoráns ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. ✓
(geom. sor $q<1$)

Biz 2): $a_{n+1}\geq q a_n\geq q^2 a_{n-1}\geq\ldots\geq q^n a_1$ ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}a_1$ div. minoráns ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div. ✓
(geom. sor $q\geq 1$)

(4)* Hányados krit. limeszes alakja: $c=\infty$ is jó
$\forall n$-re $a_n>0$ és 1) $\exists \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=c<1$ ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.
2) $\exists \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=c>1$ ⟹ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

(5) Gyökkrit.
$\forall n\geq N_0$-ra $a_n>0$ és 1) $\sqrt[n]{a_n}\leq q<1$ ⟹ $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$ konv.
2) $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ ⟹ $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$ div.

Biz 1): $0<a_n\leq q^n<1$ és $\sum_{n=N_0}^{\infty} q^n$ konv. $\xRightarrow{\text{MAJORÁNS}}$ $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$ konv.

Biz 2): $a_n\geq 1$ ⟹ a_n általános tag nem tart 0-hoz ⟹ $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$ div.

(6)* Gyökkrit. limeszes alakja:
Ha $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c$ és $c<1$ ⟹ $\sum a_n$ konv.
$c>1$ / $c=\infty$ ⟹ $\sum a_n$ div.

(7) Fv.sor egyenletesen konv ⟹ pontonként is konv.
Biz. Definícióból következik $N(x_0,\varepsilon)=N(\varepsilon)$ $\forall x_0\in H$-ra.

(8) Egyenletesen konv. fv.sor teljesíti a Cauchy kritériumot: $\exists N(\varepsilon)$: $|S_m(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ $\forall m>n>N(\varepsilon)$-ra

Biz.: Tetszőleges $\varepsilon>0$-ra $\exists N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy:
$|S_m(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ és $|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall m>n>N(\frac{\varepsilon}{2})$-re, $\forall x\in H$-ra.
$|S_m(x)-S_n(x)|=|S_m(x)-S(x)+S_n(x)-S(x)|\leq|S_m(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
ha $m>n>N(\frac{\varepsilon}{2})$, $\forall x\in H$-ra.

(9)* Ha a fv.sor teljesíti a Cauchy-kritériumot, akkor egyenletesen konv.

(10) Az egyenletes és abszolút konvergencia elégséges feltétele:
Weierstraß-kritérium:
Ha $\exists (b_k)$, hogy $|f_k(x)|\leq b_k$: $x\in H$, és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konv. numerikus sor, akkor:
1) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolút konvergens
2) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens

Biz 1): majoráns kritérium miatt
Biz 2): $|f_{n+1}(x)+\ldots+f_m(x)|\leq|f_{n+1}(x)|+\ldots+|f_m(x)|\leq b_{n+1}+\ldots+b_m<\varepsilon$ (Cauchy krit b_k-ra) ha $m>n>N(\varepsilon)$
ez pedig Cauchy-krit. $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$-re H-n ⟹ egyenletesen konv.

HATVÁNYSOROK:

(1)* Ha $\sum a_k x^k$ x_2-ben konv., akkor $|x_1|<|x_2|$ esetén x_1-ben abszolút konv., így konv. is.
(2)* Ha $\sum_0 a_k x^k$ x_2-ben div., akkor $|x_1|>|x_2|$ esetén x_1-ben is divergens
(3)* Hatványsor konvergenciatartománya intervallum! x_0 kp.-ú

(4)(5) Formulák R konvergenciasugárra $0<R<\infty$ esetén:
a) $\sum_0^{\infty} a_n x^n$; $\alpha=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$; 1. $R=\frac{1}{\alpha}$ ha $\alpha>0$ véges; 2. $R=\infty$ ha $\alpha=0$; 3. $R=0$ ha $\alpha=\infty$

Biz a), 2): $x=0$-ban a sor abszolút konv. $x\neq 0$-ban:
$\sum c_n=\sum|a_n x^n|$ sorra gyökkrit: $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n||x|^n}=|x|\cdot\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=|x|\cdot\alpha=q$
$|x|\cdot\alpha=q<1$ → $|x|<\frac{1}{\alpha}$: abszolút konv.; $|x|>\frac{1}{\alpha}$ divergens ⟹ $R=\frac{1}{\alpha}$

(4)(5) b) $\sum_0 a_n x^n$; $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ esetén 1. $R=\frac{1}{\alpha}$ ha $\alpha>0$ véges; 2. $R=\infty$ ha $\alpha=0$; 3. $R=0$ ha $\alpha=\infty$.

Biz b), 2): $x=0$-ban a sor abszolút konv., $x\neq 0$-ban:
$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n|\cdot|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|=\alpha\cdot|x|=q$ (hányados krit. limeszes alakja)
$|x|<\frac{1}{\alpha}$ esetén abszolút konv.; $|x|>\frac{1}{\alpha}$ esetén div. ⟹ $R=\frac{1}{\alpha}$

(6)* Hatványsor abszolút és egyenletes konvergenciája $[\alpha,\beta]$-n $\subset(-R,R)$

(7)* Hatványsor összegfv. folytonossága: $(-R,R)$-en; R-ben balról ha itt konv., $-R$-ben jobbról ha itt konv.

(8)* Hatványsor összegfv. integrálja:
$$\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\right)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b a_k x^k dx=\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_a^b \quad \text{ha } [a,b]\subset(-R,R)$$

(9)* Hatványsor tagonkénti deriválásával nyert sor konvergenciasugara:
$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}k a_k x^{k-1}$ mint hatványsor → konvergenciasugár ugyanaz!

(10)* Hatványsor összegfv.ének deriválhatósága, a derivált hatványsora:
az összegfv. akárhányszor deriválható, konvergenciasugár ua. marad!

(11) A fv.-t n-edrendben érintő, legfeljebb n-edrendű polinom egyértelműsége

Biz.: $T_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n \to T_n(x_0)=a_0=f(x_0)$
$T_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+n a_n(x-x_0)^{n-1}\to T_n'(x_0)=a_1=f'(x_0)$
$T_n''(x_0)=2a_2=f''(x_0)$
$T_n^{(n)}(x_0)=n!a_n=f^{(n)}(x_0) \leftarrow T_n^{(3)}(x_0)=3!a_3=f^{(3)}(x_0)$
$k=\{0,1,\ldots,n\}$: $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\to T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

(12) Hatványsor alakban adott fv. Taylor-sora:
Ha f analitikus, akkor $\exists$ miatt $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ (analitikus $K_{x_0,R}$-ben ($R>0$))
analitikus fv. egyértelműen fejthető „x_0 középpontú hatványsorba":
$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

(13) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}\overset{L'H}{=}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\overset{L'H}{=}\ldots\overset{L'H}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!(x-x_0)^0}=\frac{0}{n!}=0.$

(14)* Lagrange-féle maradéktag alakja:
Ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható $K_{x_0,r}$-ben és $x\in K_{x_0,r}$, akkor
$\exists\ \xi\in(x_0,x)$ (illetve $\xi\in(x,x_0)$) amire: $f(x)-T_n(x)=R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

(15) Geometriai sorból levezethető Taylor sorok:
$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ geometriai sor, $R=1$ ($|x|<1$).

(16)/a, $\mathrm{arctg}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x|\leq 1$
$(\mathrm{arctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$; $q=-x^2$ $|q|=|-x^2|<1\to|x|<1$, $R=1$
$\int_0^x(\mathrm{arctg}\,x)'dx=\mathrm{arctg}\,x-0=\int_0^x(1-t^2+t^4-\ldots)dt=\left[t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\ldots\right]_0^x$.
$x=1$-re $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots$ konv. ⟹ $\mathrm{arctg}\,1=\frac{\pi}{4}$, hasonlóan -1-re.

(16)/b, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ $x\in(-1,1]$
$(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-\ldots$ $|x|<1$, $R=1$
$\int_0^x(\ln(1+x))'dx=\ln(1+x)-0=\int_0^x(1-t+t^2-\ldots)dt=\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ldots\right]_0^x$.
$x=1$-re, $x=-1$-re: …

(17) Elégséges feltétel fv. és T-sorának megegyezésére:
f akárhányszor differenciálható $(-R,R)$-en és $f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ egyenletesen korlátosak ⟹ $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ $x\in(-R,R)$

Biz.: $|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq K\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[\infty]{n}0$ Tehát $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$ ha $n>N(\varepsilon)$
azaz $T(x)=f(x)$

(18) e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$-re $(-\infty,\infty)$-en $f=T$: … (lap hátán)

(19) Binomiális sor konvergencia tartományának sugara:
$f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\neq -1$ $T(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ $R=1$:

Biz.: $a_{k+1}=\binom{\alpha}{k+1}=\frac{(\alpha-k)}{(k+1)}\binom{\alpha}{k}$, így $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=\left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right|\xrightarrow[\infty]{k}|-1|=1$ ⟹ $R=1$

(20)* Binomiális sor összegfüggvénye: $(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$

(21) $f(x)=\arcsin x=T(x)$?:
$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1+(-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x^2)^k=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{x^6}{3}+\ldots$ $|-x^2|<1$ → $R=1$
és akkor $\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}\frac{x^5}{2}+\ldots$

(22) Alkalmazások: fv. érték
• integrál közelítő értékének számolása
• hiba becslése → $R_n=\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ becslése
• határérték meghatározása

ANALÍZIS 2 — Fourier sor, többváltozós függvények

FOURIER SOROK:

(1)* $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin kx, \cos kx, \dots$ páronként ortogonálisak $[-\pi,\pi]$-n, így közülük bármely véges sok lineárisan ftl.
A skaláris szorzat: $(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$.

(2) Az egyenletesen konv. trigonometrikus sor együtthatóinak egyértelműsége:
$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ és a konvergencia egyenletes!!!, akkor egyértelmű kapcsolat:
$$a_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\cdot\cos kx\,dx = \frac{(\Phi|\cos kx)}{(\cos kx|\cos kx)}, \quad k=0,1,2,\dots$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\cdot\sin kx\,dx = \frac{(\Phi|\sin kx)}{(\sin kx|\sin kx)}, \quad k=1,2,\dots$$
Biz.: megmutatjuk a_2, b_2, a_3-ra. (lap hátán)

(3) Fourier együtthatók:
f 2π szerint periodikus és $f \in R_{[0,2\pi]}$ (Riemann-integrálható), akkor f Fourier sora:
$$a_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}(f|\cos kx) \quad (k=0,1,2,\dots)$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}(f|\sin kx) \quad (k=1,2,\dots)$$
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)$$

(4) Összeg, konstansszoros Fourier-sora:
$a_k^{f+g} = a_k^f + a_k^g$, $b_k^{f+g} = b_k^f + b_k^g$; $a_k^{c\cdot f} = c\cdot a_k^f$, $b_k^{c\cdot f} = c\cdot b_k^f$.

(5) Ps. & ptl. fv. F.-sora:
ha f ptl.: $a_k = 0$ $\forall k$-ra, $b_k = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(f(x)\cdot\sin kx)\,dx$
ha f ps.: $b_k = 0$ $\forall k$-ra, $a_k = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(f(x)\cdot\cos kx)\,dx$

(6)* Ha f 2x folytonosan deriválható, 2π szerint periodikus fv., akkor F.-sora egyenletesen konv.

(7)* Dirichlet-t.: Ha f 2π szerint periodikus, $f \in R_{[0,2\pi]}$, és a periódus felbontható véges sok (α,β) intervallumra, hogy itt f monoton és a végpontokban $\exists$ a véges határérték, akkor f F.-sora $\forall x$-re konv. és $\Phi(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

TÖBBVÁLTOZÓS FV.-EK FOLYTONOSSÁGA:

(1)* n-dimenziós euklideszi tér pontsorozatainak koordinátánkénti konvergenciája:
$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{a} \iff \forall i$-re $\lim x_{k_i} = a_i$

(2) Többváltozós fv.-ek limesze, átviteli elv alkalmazása (példák)
$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = b$, ha $\underline{a}$ D_f torlódási pontja $\forall \varepsilon>0$-hoz $\exists\,\delta(\varepsilon)$, hogy ha $\underline{x} \in K_{\underline{a},\delta} \cap D_f$, akkor $|f(\underline{x})-b|<\varepsilon$.
$\Updownarrow$ átviteli elv
$\forall \underline{x}_n \to \underline{a}$ pontsorozatra $f(\underline{x}_n) \to b$

Áll.: f, g folyt. $\to f+g, f\cdot g, \frac{f}{g}$ is folyt.
Pl.: $f=x, f=y \Rightarrow x^n, y^k, x^n\cdot y^k, c, \dots$ stb. polinomok

(3)* Összetett fv. folytonossága: $\underline{a}$ belső pontja $D_f \subset \mathbb{R}^m$-nek, $f(\underline{a})=\underline{b}$ belső pontja $D_g \subset \mathbb{R}^k$-nak:
Ha $\underline{f}: D_f \to \mathbb{R}^k$ fv. folytonos $\underline{a}$-ban, $\underline{g}: D_g \to \mathbb{R}^n$ fv. folytonos $\underline{b}=\underline{f}(\underline{a})$-ban, akkor $\underline{g}\circ\underline{f}$ is folyt. $\underline{a}$-ban.

(4)* Kompakt halmazon folytonos fv.-ek tulajdonságai: ($\mathbb{R}^n$-ben zárt és korlátos)
a, Weierstraß I. H kompakt halmaz és $f \in C_H^0 \Rightarrow f(H)$ is kompakt halmaz,
b, Weierstraß II. H kompakt halmaz, és $f \in C_H^0$, akkor f felveszi infimumát és szuprémumát:
$\exists\, \underline{\xi}, \underline{\eta} \in H$, hogy $f(\underline{\xi}) = \sup_{\underline{x}\in H}\{f(\underline{x})\}$; $f(\underline{\eta}) = \inf_{\underline{x}\in H}\{f(\underline{x})\}$.

TÖBBVÁLTOZÓS FV.-EK DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA:

(1) Ha f $\underline{a}$-ban totálisan deriválható $\Rightarrow$ f $\underline{a}$-ban folytonos.
Biz.: $f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}$
$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}(f(\underline{a}+\underline{h})) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}(f(\underline{a})+\underline{A}\cdot\underline{h}+\underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}) = f(\underline{a})$ → a fvérték megegyezik a helyettesítési értékkel $\Rightarrow$ folyt.!

(2) Ha f $\underline{a}$-ban ($\underline{a}$ D_f belső pontja) totálisan deriválható $\Rightarrow$ $\exists$ $\forall$ i-k változója szerinti parciális deriváltja
Biz.: $\underline{h} = (0,0,\dots,0,h_k,0,\dots,0,0)$ (skaláris szorzás miatt csak a k-adik tag marad!)
$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = A_k\cdot h_k + \varepsilon_k(\underline{h})\cdot h_k \to \frac{f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})}{h} = A_k + \varepsilon_k(\underline{h}) \xrightarrow[h\to 0]{} A_k = f'_{x_k}(\underline{a})$
(Tehát $\operatorname{grad} f|_{\underline{a}} = \underline{A} = (f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m})$)

(3)* $f: \underline{a} \in \operatorname{int} D$, Ha f'_{x_i}-k $\exists$ és folytonosak $K_{\underline{a}}$-ban!!! $\Rightarrow$ f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban.

(4) 2változósra: érintősík: $f(x,y)$ totálisan deriválható (x_0,y_0)-ban.
$\Delta f = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)\cdot h + f'_y(x_0,y_0)\cdot k = df((x_0,y_0),(h,k))$
máshogy: $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$
Síkkal közelítünk: $z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
Tehát az érintősík: $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$

(6) Iránymenti derivált: $\frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = \lim_{t\to+0}\frac{f(\underline{a}+t\cdot\underline{e})-f(\underline{a})}{t}$ $|\underline{e}|=1$, $\underline{a} \in \operatorname{int} D_f \subset \mathbb{R}^m$
Ha f totálisan deriválható $K_{\underline{a}}$-ban, akkor $\underline{a}$-ban $\forall$ iránymenti derivált $\exists$ és
$$\frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a})\cdot\underline{e} \quad (|\underline{e}|=1):$$
Biz.:
$\underline{x} = \underline{\varphi}(t) := \underline{a}+t\cdot\underline{e}$, $\frac{d\underline{\varphi}}{dt} = \underline{e}$. $h(t) := f(\underline{\varphi}(t))$
$$\frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = \lim_{t\to+0}\frac{f(\underline{a}+t\underline{e})-f(\underline{a})}{t} = \frac{h(t)-h(0)}{t} = \frac{dh}{dt}\Big|_0 = \overbrace{f'(\underline{a}+0\cdot\underline{e})\cdot\underline{e}}^{(f(\underline{a}+t\underline{e}))'|_0} = \operatorname{grad} f(\underline{a})\cdot\underline{e}$$

(7) Max., min. iránymenti derivált nagysága:
$\frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|\cdot|\underline{e}|\cdot\cos\varphi$
max.: $\cos\varphi = 1$: $\underline{e} \parallel \operatorname{grad} f(\underline{a})$ és $\max\frac{df}{d\underline{e}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|$.
min.: $\cos\varphi = -1$: $\underline{e}$ ellentétes: $\min\frac{df}{d\underline{e}} = -|\operatorname{grad} f(\underline{a})|$.

(8)* Young-t.: Ha f m-változós fv. összes $\frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_\ell \partial x_k}$ $\exists$ és folytonos $K_{\underline{a}}$-ban, akkor $\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_k}f(\underline{x})\Big|_{\underline{a}} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\ell}f(\underline{x})\Big|_{\underline{a}}$

(9) Lok. szé. létezésének szükséges feltétele:
$K_{\underline{a},\delta} \subset D_f$ és f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban.
Ha f-nek $\underline{a}$-ban lok. szé.-e van $\Rightarrow df(\underline{a},\underline{h}) = 0$ $\forall |\underline{h}|<\delta$-ra.
Biz.: belátjuk, h. a parciális deriváltak nullák $\underline{a}$-ban:
$f_k(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_m)$: f_k-nak is lok. szé.-e van a_k-ban $\Rightarrow f'_k(a_k)=0$.
de $\frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_k} = f'_k(a_k) = 0$.

(10)* Ha $f \in C^2_{K_{(x_0,y_0),\delta}}$ és $D(x,y) := \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$ akkor: ha $f'_x(x_0,y_0)=0$ és $f'_y(x_0,y_0)=0$,
akkor ha $D>0$: van szé.: $f''_{xx}>0$: lok. min. $f''_{xx}<0$: lok. max.
$D<0$: nincs lok. szé.
$D=0$ további vizsgálat kell

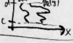
(11)* Kompakt tartományon folytonos fv. abszolút szé.-ének a számolása:
Hol lehet?:
- ahol f nem deriválható
- ahol lok. szé. lehet
- a tartomány határán.

TÖBBVÁLTOZÓS FV.-EK INTEGRÁLJA:

(1)* $\iint$ és $\int\int$ kapcsolata téglalapon:
Ha f Riemann-integrálható $[a,b]\times[c,d]$-n és $\forall y \in [c,d]$-re $\exists$ $\int_a^b f(x,y)\,dx = \varphi(y)$, akkor
$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

(2)* $\iint$ és $\int\int$ kapcsolata normáltartományon:
$$\iint_{N_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx \quad \text{ha } f \text{ folyt. } N_x\text{-en}$$

$$\iint_{N_y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy \quad \text{ha } f \text{ folyt. } N_y\text{-on}$$



(3)* $\iint$ és $\iiint$ transzformációja:
$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ $f, x'_u, x'_v, y'_u, y'_v$ folytonos, $|J| \neq 0$:
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A^*} f(x(u,v), y(u,v))\cdot|J|\,du\,dv$$
2 — Polártr.
3 — Gömbi
3 — Henger
$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$, akkor: $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V^*} f\begin{pmatrix} x(u,v,w), \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}|J|\cdot du\,dv\,dw$

(4)* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ polártr.-val, rendőrelv. ...

(5)* Áll.: térfogatszámítás, ...

ANALÍZIS 2 — Komplex $\frac{\text{változós}}{\text{értékű}}$ fv.-ek:

$z = r\cdot e^{j\varphi} = r\cdot(\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi)$

(1)* komplex fv. folytonossága $\Leftarrow$ ha f differenciálható z_0-ban.

(2)* $f(z) = u(x,y) + v(x,y)\cdot j$ differenciálható z_0-ban $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ • u, v totálisan deriválható (x_0,y_0)-ban

(x_0,y_0)-ban! • $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ és $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$; $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ } C.-R.-féle parciális differenciálegyenletek

Ekkor $f'(z_0) = u'_x\big|_{x_0,y_0} + j\cdot v'_x\big|_{x_0,y_0}$.

(3)* Elégséges tétel $f'(z_0)$ létezésére:
- u, v parciális deriváltjai $\exists$-nek $K_{(x_0,y_0)}$-ban és itt folytonosak,
- és a C.-R. egyenletek teljesülnek (x_0,y_0)-ban

• f reguláris z_0-ban ha $\exists\ \delta>0$, hogy: f differenciálható $K_{z_0,\delta}$-ban

• f reguláris T tartományban (öf. és nyílt ponthalmaz) ha $\forall$ pontjában reguláris

• $f \in C^2_H$ harmonikus H-n ha $\Delta f = 0$: 2 változósra: $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$

(4)* Ha f reguláris egy pontban, akkor ott $\exists$ u, v magasabbrendű parciális deriváltjai

(5) Ha f reguláris $K_{z_0,\delta}$-ban, akkor ott u és v harmonikus fv.:

Biz.:
$$u'_x = v'_y \qquad u''_{xx} = v''_{yx} \qquad v''_{xx} = -u''_{yx}$$
$$u'_y = -v'_x\ ; \qquad +\ u''_{yy} = -v''_{xy} \qquad v''_{yy} = u''_{xy}$$
$$\Delta u = 0 \qquad \Delta u = 0$$
Young-t. miatt

(felhasználtuk h. a regularitás miatt f akárhányszor differenciálható)

(6)* Ha v harmonikus, akkor $\exists$ f (egyértelmű), hogy $\mathrm{Im}(f(z)) = v(x,y)$
azaz $\exists$ u, melynek v harmonikus társa.

(7)* Ha u harmonikus, akkor $\exists$ f (egyértelmű), hogy $\mathrm{Re}(f(z)) = u(x,y)$
azaz $\exists$ v, melynek u harmonikus társa.

(8) $e^z = e^{x+jy} = e^x\cdot e^{jy} = e^x\cdot(\cos y + j\sin y)$ DEFINÍCIÓ

$\hookrightarrow$ PERIODIKUS: periódusa $2\pi j$.
$$e^{z+2k\pi j} = e^{x+j(y+2k\pi)} = e^z \quad \text{(}\infty\text{ sok értékű leképezés)}$$

ÉRTÉKKÉSZLETE: $e^z \neq 0$, mert $|e^z| = e^x \neq 0$
$e^z \neq \infty$, mert $|e^z| = \infty$ csak ha $x\to\infty$, azaz $z\to\infty$,
de: $z\to\infty$; $e^z\to\infty$ | $z\to\infty$; $e^z\to 0$.

$\forall$ más értéket felvesz:
$$e^{z_0} = e^{x_0}\cdot e^{jy_0} = w_0 = \rho_0 e^{j\Theta_0} \quad (w_0 \text{ adott})$$
$$\Rightarrow e^{x_0} = \rho_0;\ x_0 = \ln\rho_0 \text{ és } y_0 = \Theta_0 + 2k\pi$$
Tehát $z_0 = \ln\rho_0 + j(\Theta_0 + 2k\pi)$

Főág: $-\pi \le y < \pi$

(9) $\ln z = w \Leftrightarrow z = e^w \Rightarrow$ ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

ÉRTÉKKÉSZLET: főág

$z = e^w = |z|\cdot e^{j\cdot\arc z} = e^u e^{jv} \to e^u = |z| \to u = \ln|z|$ (valós!!)
$v = \arc z$ $(-\pi \le \arc z < \pi)$

tehát
- $\ln z = \ln|z| + j\arc z$
- $\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + j(\arc z + 2k\pi)$ $\quad(\mathrm{Ln}_k z = \ln|z| + j(\arc z + 2k\pi))$

$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + j\cdot\mathrm{Arc}\,z$.

(10) e^z reguláris, deriváltja $(e^z)' = e^z \neq 0$.

$e^z = e^x\cdot(\cos y + j\cdot\sin y)$ $\qquad u'_x = e^x\cos y \quad u'_y = -e^x\sin y$

$u = e^x\cdot\cos y$ $\qquad v'_x = e^x\sin y \quad v'_y = e^x\cos y$

$v = e^x\cdot\sin y$ $\qquad$ • $u'_x = v'_y$; $u'_y = -v'_x$

• totálisan deriválható

e^z deriválható.

és deriváltja $(e^z)' = u'_x + jv'_x = e^x\cos y + je^x\sin y = e^z$

(11) (12) $\sin z, \cos z, \mathrm{sh}\,z, \mathrm{ch}\,z$:
$$\sin z := \frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}, \quad \cos z := \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}$$
$$\mathrm{sh}\,z := \frac{e^z-e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch}\,z := \frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

Miért: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$, $e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$; $\sin z = \ldots$, $\cos z = \ldots$ és helyére φ helyett z-t írok

$\sin z = \sin(x+jy) = \sin x\cdot\cos jy + \cos x\cdot\sin jy =$
$= \sin x\cdot\mathrm{ch}\,y + j\cos x\,\mathrm{sh}\,y$ $\qquad$ hasonlóan többire,

$$\boxed{\begin{aligned}(\sin z)' &= \cos z\\ (\cos z)' &= -\sin z\\ (\mathrm{sh}\,z)' &= \mathrm{ch}\,z\\ (\mathrm{ch}\,z)' &= \mathrm{sh}\,z\end{aligned}}$$

$\boxed{\text{Mert}}$: • $\sin jz = j\,\mathrm{sh}\,z$ • $\cos jz = \mathrm{ch}\,z$

(12) • $\mathrm{sh}\,jz = j\sin z$ • $\mathrm{ch}\,jz = \cos z$

Pl. $\sin jz = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2j} = -j\cdot\frac{e^{-z}-e^{z}}{2} = j\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = j\,\mathrm{sh}\,z$ $\quad$ mert $\frac{1}{j} = -j$

(13)* Komplex fv. görbe menti integráljának számolása:

L: $z(t) = x(t) + jy(t)$ vagy $z(t) = r(t)\cdot e^{j\varphi(t)}$, $z \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ f folyt. L-en:
$$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot\dot z(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$$

(14)* Cauchy-Goursat féle alaptétel:
egyszeresen összefüggő T tartományon reguláris f fv. T-beli zárt görbe menti integrálja nulla: $\oint_L f(z)\,dz = 0$.

(15)* Cauchy-Goursat t. következményei:
- egyszeresen összefüggő T-n f reguláris, $L\subset T$ egyszerű, ekkor $\int_{L_{AB}} f(z)\,dz$ értéke független L-től, csak a végpontoktól függ.
- egyszeresen összefüggő T-n reguláris f, akkor $\exists$ primitív függvénye.

(18)* Cauchy-féle integrálformula:
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{G^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$
ha f reguláris az egyszeresen öf. T-n, $G\subset T$ egyszerű, zárt görbe, „egyszer fut körbe” z_0 pontot.

(19)* Általánosított Cauchy-féle integrálformula:
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\cdot\oint_{G^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$
$n = 1, 2, \ldots$

ha f reguláris az egyszeresen öf. T-n, $G\subset T$ egyszerű, zárt görbe, „egyszer fut körbe” z_0 pontot,
Ekkor: $\Rightarrow$ f z_0-ban akárhányszor differenciálható fv.

vagyis ha f reguláris az egyszeresen öf. T-n, akkor ott akárhányszor differenciálható.

HATVÁNYSOROK (18):

• $f(x) = \boxed{e^x}$

$f(0)=1,\ f'(0)=1, \ldots$

Tehát $T(x) = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$ $x \in \mathbb{R}$

$f^{(k)}(x) = e^x$ $x \in \mathbb{R}$-en van korlátos, de tetsz. $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$-n

$|f^{(k)}(x)| \le e^{\beta} \rightarrow$ egyenletesen korlátosak $\Rightarrow f = T$ $\forall$hol

• $f(x) = \boxed{\sin x}$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x$ ismétlődik

tehát $T(x) = \boxed{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$ $x \in \mathbb{R}$

deriváltak $(-\infty,\infty)$-en egyenletesen korlátosak $\rightarrow f = T$ $\forall$hol

• $f(x) = \boxed{\cos x}$, $\quad T(x) = \boxed{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}$ $x \in \mathbb{R}$

• $f(x) = \mathrm{sh}\,x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ | • $f(x) = \mathrm{ch}\,x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$ $x \in \mathbb{R}$

$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ | $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

FOURIER-SOROK (2):

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \ldots = \Phi(x) \quad / \cdot \cos 2x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2}\cos 2x + a_1 \cos x \cos 2x + b_1 \sin x \cos 2x + a_2 \cos^2 2x + \ldots\right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cos 2x \, dx$$

$$\underbrace{\frac{a_0}{2}(1|\cos 2x)}_{0} + \underbrace{a_1(\cos x|\cos 2x) + b_1(\sin x|\cos 2x)}_{\text{ortogonalitás miatt}\ 0} + a_2(\cos 2x|\cos 2x) + \ldots = (\Phi(x)|\cos 2x)$$

$$a_2 \cdot (\cos 2x|\cos 2x) = (\Phi(x)|\cos 2x) \checkmark$$

• $\mathrm{sh}\, jz = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2} = j \sin z.$

• $\cos jz = \frac{e^{jjz} + e^{-jjz}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \mathrm{ch}\, z$

• $\mathrm{ch}\, jz = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos z$

$\cos z = \cos(x + jy) = \cos x \cos jy - \sin x \sin jy =$
$= \cos x \cdot \mathrm{ch}\, y - j(\sin x\, \mathrm{sh}\, y).$

$\mathrm{sh}\, z = \mathrm{sh}(x + jy) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, jy + \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{sh}\, jy =$
$= \mathrm{sh}\, x \cos y + j(\mathrm{ch}\, x \sin y)$

$\mathrm{ch}\, z = \mathrm{ch}(x + jy) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, jy + \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, jy =$
$= \mathrm{ch}\, x \cos y + j(\mathrm{sh}\, x \cdot \sin y)$