1. feladat (18 pont)
Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait algebrai alakban!

$$z^4 + (9+i)z^2 + 9i = 0$$

Mo. $z^2 = \dfrac{-9-i+\sqrt{(9+i)^2-36i}}{2} = \dfrac{-9-i+\sqrt{(9-i)^2}}{2}$ **(6p)** vagy $z^2 = -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$ **(4p)** vagy $z^2 = -9$ **(2p)** . Az első egyenlet megoldásai $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, **(4p)** , a második egyenlet megoldásai pedig $\pm 3i$. **(2p)** .

---

2. feladat (5+12=17 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját!
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n}{n^3+2n+1} = 3$!

Mo. *a*) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. **(5p)**
b) Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\left|\frac{3n^3-2n}{n^3+2n+1} - 3\right| = \frac{8n+3}{n^3+2n+1} \leq \frac{11n}{n^3} = \frac{11}{n^2} < \varepsilon, \qquad \mathbf{(7p)}$$

ha $n > \sqrt{\dfrac{11}{\varepsilon}}$ **(3p)** , így $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\dfrac{11}{\varepsilon}}\right]$. **(2p)**

---

3. feladat (21 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^4-3n^2+7}{n^5+2n^4-5n^2}}, \qquad b_n = \sqrt{\frac{n^4-3n^2+7}{n^5+2n^4-5n^2}}$$

Mo. $n \geq 3$ esetén **(1p)** (elég nagy n esetén is jó)

$$1 \overset{(\mathbf{2p})}{\leftarrow} \sqrt[n]{\frac{1}{12}\frac{2}{\sqrt[n]{n}}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \sqrt[n]{\frac{n^4-\frac{n^4}{2}}{n^5+2n^5}} \overset{(\mathbf{3p})}{\leq} a_n \overset{(\mathbf{2p})}{\leq} \sqrt[n]{\frac{n^4+7n^4}{n^5}} \overset{(\mathbf{1p})}{\leq} \sqrt[n]{8}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \overset{(\mathbf{2p})}{\to} 1$$

így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ **(1p)** .

$$b_n \overset{(\mathbf{4p})}{=} \sqrt{\frac{n^4}{n^5}\cdot\frac{1-\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^4}}{1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^3}}} \to 0, \quad \mathbf{(3p)}$$

---

4. feladat (21 pont)
Konvergens-e az $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Mo. $a_2 = \sqrt{10} > a_1$, és ha $a_n < a_{n+1}$, akkor $6a_n - 8 < 6a_{n+1} - 8$ tehát $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8} < \sqrt{6a_{n+1} - 8} = a_{n+2}$, vagyis a sorozat monoton nő **(5p)** . Ha a sorozat korlátos, akkor konvergens, és határértéke a sorozat legkisebb felső korlátja **(2p)** . A lehetséges A határérték kielégíti az $A = \sqrt{6A - 8}$ egyenletet **(2p)** , vagyis $A = 2$ vagy $A = 4$ **(2p)** . Mivel $a_n \geq 3$, így a határérték csak 4 lehet **(2p)** . Belátjuk, hogy $a_n < 4$ **(2p)** . $a_1 < 4$, és ha $a_n < 4$, akkor $6a_n - 8 < 16$, így $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 4} = 4$ **(4p)** . A sorozat tehát monoton és korlátos, így konvergens, tehát határértéke 4. **(2p)**

---

5. feladat (23 pont)
Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \left(\frac{3-n}{7+n}\right)^{5n}, \qquad b_n = \left(\frac{3-n}{7+n}\right)^{n^5}$$

Mo.

$$a_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{7}{n}\right)^n}\right)^5 \to e^{-50}, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] -\left(\dfrac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{7}{n}\right)^n}\right)^5 \to -e^{-50}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \mathbf{(7p)}$$

A sorozat torlódási pontjai a $\pm e^{-50}$ **(2p)** , vagyis $\limsup a_n = e^{-50} \neq -e^{-50} = \liminf a_n = 0$ **(2p)** , és a sorozat nem konvergens **(1p)** .

$b_n = a_n^{\frac{n^4}{5}}$ **(4p)** , így elég nagy n esetén $|b_n| < (e^{-10}+\varepsilon)^{n^4} \to 0$, ha $\varepsilon < 1 - e^{-10}$ **(4p)** . Így a sorozat egyetlen torlódási pontja 0 **(1p)** , és $\limsup b_n = \liminf b_n = 0 = \lim b_n$ **(2p)** .

IMSC feladat (8 IMSC pont)

Bizonyítsa be, hogy $z = re^{i\vartheta}$, $w = Re^{i\varphi}$, $0 \leq r < R$ esetén

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}!$$

Mo. $\dfrac{w+z}{w-z} = \dfrac{(w+z)(\overline{w} - \overline{z})}{|w-z|^2} = \dfrac{|w|^2 - |z|^2 + z\overline{w} - \overline{z}w}{|w-z|^2}$.

Itt $\operatorname{Re}(z\overline{w} - \overline{z}w) = 0$, és $|w-z|^2 = |w|^2 + |z|^2 - (z\overline{w} + \overline{z}w)$, ahol $|z|^2 = r^2$, $|w|^2 = R^2$ és $z\overline{w} + \overline{z}w = 2\operatorname{Re} z\overline{w} = 2Rr\cos(\vartheta - \varphi)$.
