Valószínűségszámítás vizsga dolgozat megoldása

Műszaki informatika szak

2011. május 25.

1. Valaki addig dob ismételten három szabályos kockával, amíg mindhárom dobott érték meg nem egyezik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ehhez legalább 6 dobás kell?

   Megoldás: Jelölje X a szükséges dobások számát! $X \in G\left(\frac{1}{36}\right)$

   $\mathbf{P}(X > 5) = 1 - \sum\limits_{i=1}^{5} \mathbf{P}(X = i) = 1 - \sum\limits_{i=1}^{5} \left(\frac{35}{36}\right)^{i-1} \frac{1}{36} = 0,868615786$

2. Egy bolt mindkét ellentétes bejáratánál reggel elhelyeznek 100-100 db reklám-katalógust. A két oldalon ugyanakkora a vásárlói forgalom. Abban a pillanatban, amikor valamelyik oldalon az utolsó katalógust is elveszik, jelölje X a másik oldalon található katalógusok számát! Adja meg X eloszlását!

   Megoldás: $\mathbf{P}(X = k) = \binom{200-k}{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{200-k} \cdot 2,\ k = 1, 2, ..., 100$

3. Legyen $X \in N(-2, 3)$ és $Z = \left(\frac{X+2}{3}\right)^2$. Számolja ki Z várható értékét és szórásnégyzetét!

   Megoldás: $Y = \frac{X+2}{3} \in N(0, 1)\,, \mathbf{E}Z = \mathbf{E}Y^2 = 1, \mathbf{E}Z^2 = \mathbf{E}Y^4 = 3$

   $\mathbf{E}Y^4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \varphi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-x^3\right)\left(-x\varphi(x)\right) dx =$

   $= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-x^3\right) \varphi'(x) dx = \left[-x^3 \varphi(x)\right]_{-\infty}^{\infty} + 3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)\, dx = 3$

   $\sigma^2 Z = 3 - 1 = 2$

4. Legyen az X és Y együttes sűrűségfüggvénye

   $$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right) & , x, y \in (0, 1) \\ 0 & , \text{egyébként} \end{cases}$$

   Számolja ki az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ feltételes várható értéket!

   Megoldás: $f_X(x) = \int\limits_{0}^{1} \frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right) dy = \frac{12}{5}\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right), x \in (0, 1)$

   $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}},$

   $\mathbf{E}(Y \mid X = x) = \int\limits_{0}^{1} y \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}} dy = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{4}}{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}$

5. Legyen $X_1, X_2, ..., X_n$ az $f(x) = e^{\vartheta - x}, x > \vartheta > 0$ sűrűségfüggvényhez tartozó minta. Igazoljuk, hogy $T_1 = X_1^* - \frac{1}{n}$ a ϑ trozítatlan becslése.
Megoldás: $F_{X_1^*}(t) = 1 - (1 - F(t))^n, f_{X_1^*}(t) = n(1 - F(t))^{n-1} f(t)$
$F(t) = \int\limits_{\vartheta}^{t} e^{\vartheta - x} dx = 1 - e^{\vartheta - t}, t > \vartheta.$
$f_{X_1^*}(t) = ne^{n(\vartheta - t)}, \mathbf{E}X_1^* = \int\limits_{\vartheta}^{\infty} tne^{n(\vartheta - t)} dt =$
$= \left[-te^{n(\vartheta - t)}\right]_{\vartheta}^{\infty} + \int\limits_{\vartheta}^{\infty} e^{n(\vartheta - t)} dt = \vartheta + \frac{1}{n}$
$\mathbf{E}T_1 = \mathbf{E}X_1^* - \frac{1}{n} = \vartheta$

6. Adja meg az n szabadságfokú Student eloszlás definícióját!
Megoldás: Ha $X \in N(0,1), Y \in \chi_n^2$ függetlenek, akkor $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ eloszlása n szabadságfokú Student, vagy t- eloszlás lesz.