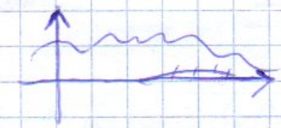
- független változók

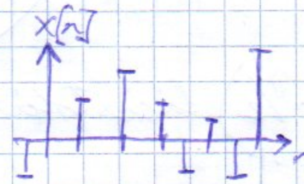
I. Folytonos jelek



Értékkészlet folytonos / diszkrét

Pl.: • mikrofon
• fotográfia (analóg) $x(hor.; vert.)$
↑ fényesség

II. Diszkrét jelek



} Értékkészlet folyt.
⇕
végtelen pontos mérés során kapott érték
↙
diszkrét, ha egy pontot kiválasztunk belőle

Determinisztikus jel ⟺ Stochasztikus jel
- előre meghatározható - statisztikai jellemzők

III. Jelek analízise

A) Folytonos idejű, periodikus jelek:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi) \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Periodicitás: $x(t) = x(t+T_0)$

- végtelen sok periodicitási intervallum
⇓ min
periodicitás T_0

$$A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\cos(\omega_0(t+T_0)+\varphi) = A\cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 T_0}_{2\pi\cdot m} + \varphi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_0}$$

Folytonos idejű jeleknél időtolás ⟺ fázistolás

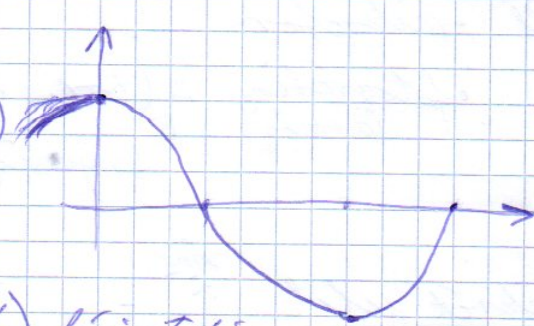
j. és R
IEA

$A\cos[\omega_0(t+t_0)] = A\cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 t_0})$

időtolás — fázistolás

$\Phi = 0 \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t)$

- periodikus $x(t) = x(t+T_0)$
- páros jel $x(t) = x(-t)$



$\Phi = -\pi/2 \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t - \pi/2)$ fázistolás

$= A\sin(\omega_0 t)$

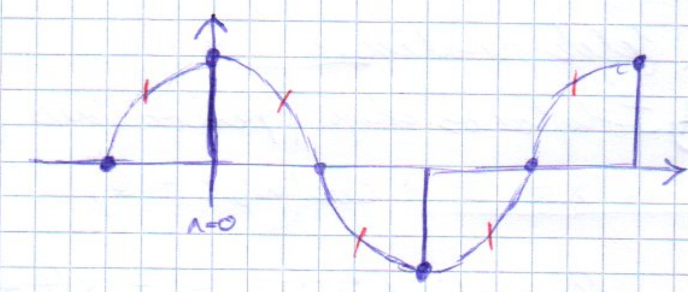
$\omega_0 \cdot t_0 = -\frac{\pi}{2} \qquad A\cos\omega_0\left(t - \frac{T_0}{4}\right)$ időtolás

$\frac{2\pi}{T_0} t_0 = -\frac{\pi}{2}$ jell.:
- periodikus $x(t) = x(t+T_0)$
- páratlan $x(t) = -x(-t)$

$t_0 = -\frac{T_0}{4}$

Diszkrét jelek

$x[n] = A\cos(\Omega_0 n)$



B) Diszkrét idejű jelek

időtolás $\Rightarrow$ fázistolás ? ✓

$$A\cos[\Omega_0(n+n_0)] = A\cos(\Omega_0 n + \Omega_0 n_0)$$

$\Phi = 0$ $\qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{4}$

$A\cos[\Omega_0 n]$ $\qquad x[n] = x[-n]$

~~időtolás~~
~~fázistolás $\rightarrow$ időtolás~~ időtolás $\Rightarrow$ fázistolás ✓

$$x[n] = A\cos[\Omega_0(n-n_0)] = A\cos(\Omega_0 n - \Omega_0 n_0)$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow -\Omega_0 n_0 = \frac{2\pi}{4}\cdot 1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$x[n] = A\cos(\Omega_0 n - \pi/2) = A\sin(\Omega_0 n)$$

Fázistolás $\Rightarrow$ időtolás ? (eredményeket)

Periodicitás

$$x[n] = x[n+N]$$

$$A\cos[\Omega_0(n+N)+\Phi] = A\cos\Omega_0 n + \underbrace{\Omega_0 N}_{2\pi m} + \Phi$$

$$\Omega_0 N = 2\pi m$$

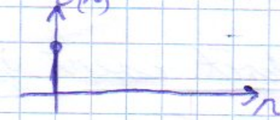
$$N = \frac{2\pi m}{\Omega_0} \Rightarrow N, m \rightarrow \text{egész szám}$$

$N \rightarrow$ legkisebb

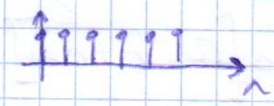
II.9. 1.hét 4/4

jés R I.EA

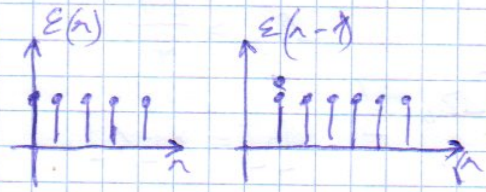
Dirac impulzus: $\delta[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n=0\\ 0 & n>0\end{cases}$



Egység ugrás fv. $\varepsilon(n)=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\geq 0\end{cases}$

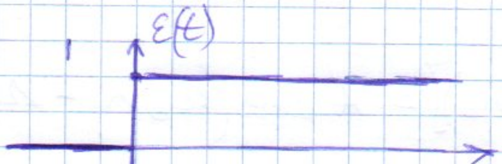


$\delta(n)=\varepsilon(n)-\varepsilon(n-1)$



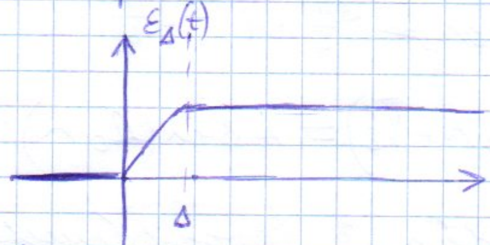
$\varepsilon(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$

A, $\varepsilon(t)$



$\delta(t)=\frac{d\,\varepsilon(t)}{dt}$

$\delta_\Delta(t)=\frac{d\,\varepsilon_\Delta(t)}{dt}$



$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$

$\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)=\delta(t)$

Rendszerek időtartománybeli jellemzése

I. A jelek jellemzése

1, Véges tulajdonságú jelek

1.a, ~~Va~~ Korlátos $M < \infty$

FI $|x(t)| < M$

DI $|x[k]| < M \quad \forall k$

1.b, Abszolút integrálható, összegezhető

FI $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

DI $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty$

1.c, Négyzetesen integrálható, összegezhető (véges energiájú)

FI $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$

| | komplex értékű jeleknél fontos

DI $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < \infty$

1.d, véges teljesítményű

FI $\lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt \right\} < \infty$

DI $\lim_{L\to\infty} \left\{ \frac{1}{2L+1} \sum_{k=-L}^{L} |x[k]|^2 \right\} < \infty$

Általánosított derivált (FI)

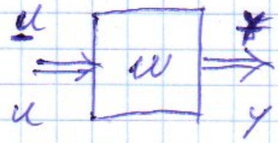
$$x(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \boxed{x'(\tau)}\, d\tau}_{x(t)-x(t_0)} + x(t_0)$$

$x(t) \longleftarrow \varepsilon(t)$

$x'(t) \longrightarrow \delta(t)$

2, Rendszerek

- Fizikai obj. modelljei, melyek fizikai változókkal leírhatók.



2. as
MIMO
SIMO $y = W\{u\}$
MISO
$\boxed{\text{SISO}}$

2. b, Rendszer idővariáns, időinvariáns

Pl.: mobil rádió ⇓ csatorna - idővariáns mobil/környezet változásától függ

2. c, Determinisztikus / Stochasztikus

2. d, **FI** **DI**

$u(t), y(t)$ $u[k], y[k]$

I/O

FI / DI DI / FI

Pl.: A/D konverter D/A konverter

2. e, Lineáris rendszerek

érvényes a szuperpozíció:

$$W\{c_a \cdot u_a + c_b \cdot u_b\} = W\{c_a \cdot u_a\} + W\{c_b \cdot u_b\} = c_a \cdot W\{u_a\} + c_b \cdot W\{u_b\}$$

Pl.: $y = A \cdot u + B$ $A \neq 0, B \neq 0$

$$A[a u_a + b u_b] + B = A a u_a + A b u_b + B \overset{?}{=} a(A u_a + B) + b \cdot (A u_b + B)$$

Nem lineáris

Ha $B = 0 \Rightarrow$ lineáris

Spec. esetek

- $W\{c \cdot u\} = c \cdot W\{u\}$
- $W\{0\} = 0$

$W\{c \cdot 0\} = c \cdot W\{0\} = W\{0\}$ $\forall c$

Lineáris rendszerek 0 gerjesztésre 0 választ ad!!

2.f, Invariáns (időben)

FI $y(t) = W\{u(t)\} \xRightarrow{inv} W\{u(t-T)\} = y(t-T)$

2.g, Kauzalitás

$y(t_1)$ bármely t_1 esetén csak a gerjesztés $u(t)$ olyan értékeitől függ, melyre $t \leq t_1$.

2.h, Memóriamentes rendszerek

$y(t_0)$ csak $u(t_0)$ értékétől függ

pl.: $y(t) = A\,u(t) + B$

2.i, Stabilitás BIBO → GV stabilitás (gerj. válasz)

bármely korlátos gerjesztésre a válasz korlátos

3. Rendszerek jellemzése időtartományban

3.a, Impulzus válasz

DI $u[k] = \delta[k] \xRightarrow{?} h[k]$ válasz (Súlyfüggvény) / $h[k] = W\{\delta[k]\}$

$u(t) = \delta(t) \xRightarrow{?} h(t)$

gerjesztés — impulzus válasz

3.b, Rendszer válasza tetszőleges gerjesztésre

LTI - linear time invariant

DI

$$u[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] \cdot \delta[k-i]$$

Válasz

$$y[k] = \underset{(k)}{W}\{u[k]\} = \underset{(k)}{W}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\cdot\delta[k-i]\right\} \overset{L}{=}$$

$$\overset{L}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\cdot W\{\delta[k-i]\} \overset{TI.}{=}$$

(TI) $h[k] = W\{\delta[k]\}$

$h[k-i] = W\{\delta[k-i]\}$

$$\overset{TI}{=} \boxed{\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\cdot h[k-i] = y[k]}$$ konvolúció

Ha ismerjük az impulzus választ és a gerjesztést, akkor egyértelműen megadható a válasz.

$y[k] = u[k] * h[k]$ konvolúció

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\cdot h[\underbrace{k-i}_{\substack{p=k-i\\ i=k-p}}] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} u[k-p]\cdot h[p]$$

A konvolúció másik irányból is elvégezhető.

Spec. rendszer $\rightarrow$ belépő impulzus válaszú rendszer $\Longleftrightarrow$

$\overset{}{\underset{LIN}{\Longleftrightarrow}}$ kauzális

Válasz

$$y[k] = \sum_{\cancel{i=-\infty}}^{\infty} u[k-i]\cdot h[i] = \sum_{i=-\infty}^{\cancel{\infty}\; k} u[i]\cdot h[k-i]$$

$i=0$, mert $h[i]$ $i<0$ $h[i]\equiv 0$ $\qquad$ $k-i\geq 0$, $k\geq i$

Gerjesztés belépő (+ rendszer kauzális)

$$y[k] = \sum_{\cancel{i=-\infty}\; i=0}^{k} u[i]\cdot h[k-i] = \varepsilon[k]\cdot\sum_{i=0}^{k} u[i]\cdot h[k-i] =$$

$u[i]=0,\ i<0$ $\qquad$ – belépő gerjesztésű

$$= \varepsilon[k]\sum_{i=0}^{k} u[k-i]\cdot h[i]$$

$$y[0] = u[0] \cdot h[0]$$

$$y[1] = u[0] \cdot h[1] + u[1] \cdot h[0]$$

$$y[2] = u[0] \cdot h[2] + u[1] \cdot h[1] + u[2] \cdot h[0]$$

Polinom szorzás

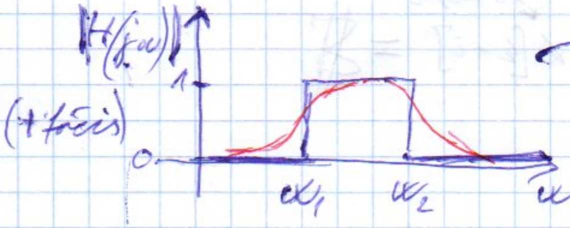
$$\underline{u_3 \; u_2 \; u_1 \; u_0} * h_2 \; h_1 \; h_0$$

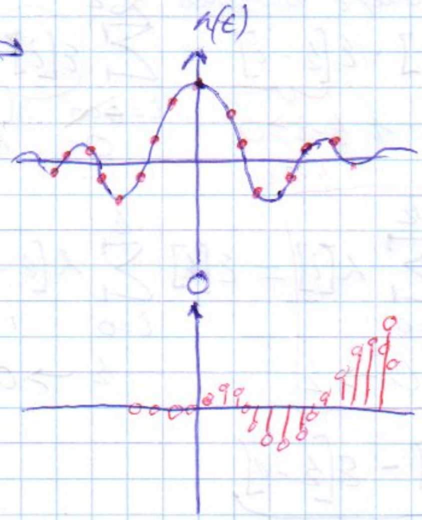
$$\begin{array}{cccccc}
h_2 u_1 & h_2 u_0 & & & & \\
 & h_1 u_1 & \cancel{h_1 u_0} & h_1 u_0 & & \\
 & h_0 u_2 & & h_0 u_1 & h_0 u_0 & \\
\hline
 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & & & h_0 u_0 &
\end{array}$$

Kauzalitás

Szűrő

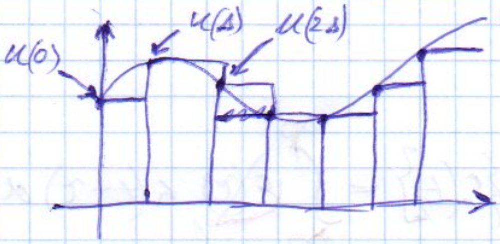
Impulzusválasz





$$\delta(t,\Delta) = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\Delta)}{\Delta}$$

FI jelek (konvolúció)



$$u(t) \cong u(0)\cdot\delta(t,\Delta)\cdot\Delta + u(\Delta)\cdot\delta(t-\Delta,\Delta)\cdot\Delta + \dots$$

$$u(t) \cong \sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta)\cdot\delta(t-k\Delta,\Delta)\cdot\Delta$$

$$u(t) = \lim_{\Delta\to 0}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} u(\underset{\downarrow\,\tau}{k\Delta})\cdot\delta(t-\underset{\downarrow\,\tau}{k\Delta},\Delta)\cdot\underset{\uparrow\,d\tau}{\Delta}\right\} =$$

$$\boxed{= \int_0^{\infty} u(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau} \quad \text{FI}$$

Tetszőleges gerjesztésre rendszer válasz

$$y(t) = \underset{LTI}{W}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(\tau)\cdot h(t-\tau)}_{\text{konvolúció}}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= u * h$$

Egységugrásra adott válasz – ugrásválasz

$g[k]$, $g(t)$

DI $g[k] = \mathcal{W}\{\varepsilon[k]\} = h[k] * \varepsilon[k] =$

belépő kauzális — belépő

$$= \sum_{i=\cancel{-\infty}\ 0}^{\cancel{\infty}\ k} h[i] \cdot \varepsilon[k-i] = \sum_{i=\cancel{-\infty}\ 0}^{\cancel{\infty}\ k} \varepsilon[i] \cdot h[k-i] = \cancel{\$}$$

1 $k - i \geq 0$ $k \geq i$ 0 1

$$= \varepsilon[k] \cdot \boxed{\sum_{i=0}^{k} h[i]} = \varepsilon[k] \sum_{i=0}^{k} h[k-i]$$

$0 \to k$ $k \to 0$

$$\underbrace{\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]}$$

$$\Downarrow \mathcal{W}\{\}$$

$$\boxed{h[k] = g[k] - g[k-1]}$$

FI ugrásválasz

$$g(t) = \mathcal{W}\{\varepsilon(t)\} = \int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{\cancel{\infty}\ t} \cancel{\varepsilon(\tau)}_1\, h(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{\cancel{\infty}\ t} h(\tau)\, \cancel{\varepsilon(t-\tau)}_1\, d\tau$$

Ha 0-ban egy dirac-imp megjelenik az integrálandó

$$g(t) = \varepsilon(t) \int_{-0}^{t} h(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \varepsilon(t) \int_{-0}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

$$h(t) = g'(t) \quad \text{(általánosított derivált)}$$

Pl.: 3 éves képzés

Jész R. III. EA II. 16.

2. két 3/4

$u[k] = \varepsilon[k] \cdot 500$

évet teljesítők α_i $\quad i = 1,2,3$

évet ismétlő β_i

$0 \le \alpha_i \le 1$

$0 \le \beta_i \le 1$ $\quad 1 - \alpha_i - \beta_i$ (bukottak)

$$\left.\begin{aligned}
&1.\text{évf.} \quad x_1[k+1] = \beta_1 x_1[k] + u[k] \\
&2.\text{évf.} \quad x_2[k+1] = \beta_2 x_2[k] + \alpha_1 x_1[k] \\
&3.\text{évf} \quad x_3[k+1] = \beta_3 x_3[k] + \alpha_2 x_2[k]
\end{aligned}\right\} \text{rendszeregyenletek}$$

$y[k] = \alpha_3 x_3[k]$ – kimeneti egyenlet

$x_i[k]$ - állapotváltozók

Diff. egyenletrendszer

$$\underline{x}[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \end{bmatrix}}_{\text{állapotalmenti mátrix}} \underbrace{\underline{x}[k]}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + 0$$

$\alpha_1 = 0{,}6 \quad \beta_1 = 0{,}2$

$\alpha_2 = 0{,}8 \quad \beta_2 = 0{,}15$

$\alpha_3 = 0{,}9 \quad \beta_3 = 0{,}08$

k	$u[k]$	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$x_3[k]$	$y[k]$
0	500	0	0	0	0
1	500	500	0	0	0
2	500	600	300	0	0
3	500	620	405	240	216
4		624	432,75	343,2	308

$k \to \infty \quad y[k] \to 345$

$$h[k] = \varepsilon[k-1]\left\{72 \cdot 0{,}2^{k-1} - 123{,}43 \cdot 0{,}15^{k-1} + 51{,}43 \cdot 0{,}08^{k-1}\right\}$$

II. 16.

Jel és R

2. hét

III. EA

4/4

DI Állapotváltozós egyenletek

DI $\underline{x}[k+1] = A\,\underline{x}[k] + b\,u[k]$

$y[k] = \underline{c}^T \underline{x}[k] + d \cdot u[k]$

↑ állapotvált. egyenlet normál alakja

Állapotegyenl.

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$

Kimeneti

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + 0 \cdot u[k]$$

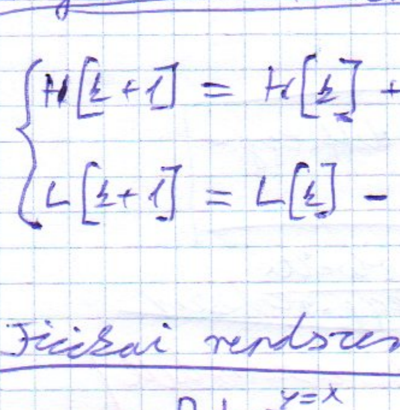
Ragadozó – zsákmány feladat

ragadozó (L), zsákmány (H)

$$\begin{cases} H[k+1] = H[k] + b_r(u[k]) \cdot H[k] - a \cdot L[k] \cdot H[k] \\ L[k+1] = L[k] - d_f \cdot L[k] + c \cdot L[k] \cdot H[k] \end{cases}$$

állapotegyenletek
⇓
nem lineáris

Fizikai rendszer (gépkocsi lengéscsillapító)



rugó: $D \cdot x \Rightarrow F_r$

dugattyú: $c \cdot v = F_d$

$$m \cdot a = v' \cdot m = F - F_r - F_d$$

$$m \cdot a = F - Dy - c \cdot y' = m \cdot y''$$

$$\boxed{y'' + \frac{c}{m} \cdot y' + \frac{D}{m} y = \frac{F}{m} = \frac{u(t)}{m}}$$ Rendszeregyenlet

FI, SISO

$$(a=)\, v' = \frac{1}{m} \overset{\text{gerjesztés}}{u} - \frac{D}{m} \cdot x - \frac{c}{m} \cdot v$$

$$x' = v$$

Állapotegyenletek:

$$x' = v$$

$$v' = -\frac{D}{m} x - \frac{c}{m} v + \frac{1}{m} u$$

Kimenet: $y = x$

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

$$\underline{x}' = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u \qquad y = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot u$$

Állapotváltozó → minimálisan szükséges

Második példa (rég):

$$\begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 & \\ -D/m & -c/m & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1/m \\ \boxed{\ } \end{bmatrix} \cdot u$$

nincs szükség a'
⇓
a sem

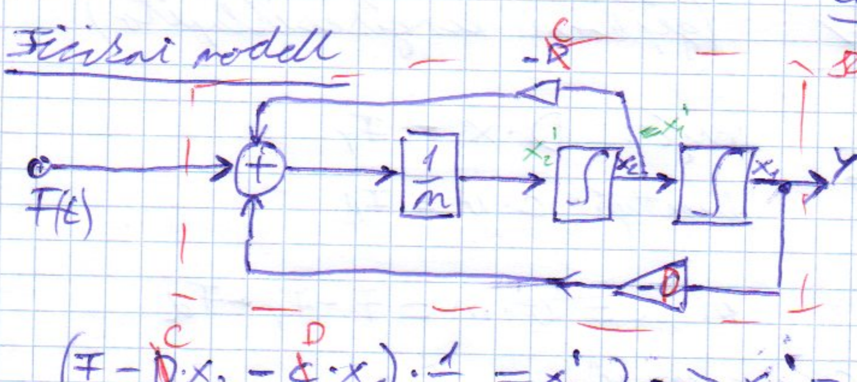
Csak annyi állapotváltozó, amennyi a rendszer teljes jellemzéséhez kell.

~~Állapotváltozó~~

Rendszeregyenlet (magasabbrendű diff. egyenlet) $\xrightarrow[\text{vált.}]{\text{áll.}}$ Elsőrendű diff. egy.-rendszer

állapotvált. egy. rendszer

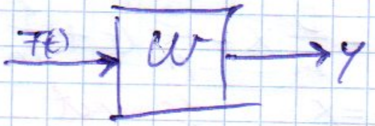
Fizikai modell



$$\left(F - \cancel{D}^{C} \cdot x_2 - \cancel{C}^{D} \cdot x_1\right) \cdot \frac{1}{m} = x_2' \Rightarrow x_2' = -\frac{\cancel{C}^{D}}{m} x_1 - \frac{\cancel{D}^{C}}{m} x_2 + \frac{F}{m}$$

$$x_2 = x_1'$$

$$y = x_1$$



Megoldás

DI

lépésenként

$$x[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{b}\cdot u[k]$$ rekurzív

Tf. h.

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{x}[0] = \text{ismert} \\ u[k] \text{ belépő} \end{array}}$

$x[1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[0] + \underline{b}\cdot u[0]$ $k=0$

$x[2] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[1] + \underline{b}\cdot u[1] =$ $k=1$

$$= \boxed{\underline{\underline{A}}^2}\,x[0] + \underline{\underline{A}}\,\underline{b}\cdot u[0] + \underline{b}\cdot u[1]$$

mátrix szorzás

saját érték határozása

$$x[3] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[2] + \underline{b}\cdot u[2] =$$

$$= \underline{\underline{A}}^3 x[0] + \underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{b}\cdot u[0] + \underline{\underline{A}}\cdot\underline{b}\cdot u[1] + \underline{\underline{A}}^0\underline{b}\cdot u[2]$$

$$\boxed{x[k] = \cancel{\sum_{i=0}^{k}} \underline{\underline{A}}^k\cdot\underline{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{A}}^{k-1-i}\cdot\underline{b}\cdot u[i]}$$

állapotegyenlet megoldása

zérus gerjesztésű — Homogén egy. megoldása

zérus állapotú — adott gerjesztésre adott válasz

Válasz

$$y[k] = \underline{c}^T\underline{x}[k] + d\cdot u[k] =$$

$$= \underline{c}^T\left(\underline{\underline{A}}^k\cdot\underline{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1}\underline{\underline{A}}^{k-1-i}\cdot\underline{b}\cdot u[i]\right) + d\cdot u[k]$$

Impulzusválasz

$$u[k] = \delta[k],\ \underline{x}[0] = \underline{0}$$

$$h[k] = \cancel{\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{A}}^k\cdot\underline{x}[0]} + \underline{c}^T\sum_{i=0}^{k-1}\underline{\underline{A}}^{k-1-i}\cdot\underline{b}\,\delta[i] + d\,\delta[k]$$ $k\geq 1$

$$h[k] = \underline{c}^T\cdot\underline{\underline{A}}^{k-1}\cdot\underline{b}\cdot 1 + d\cdot\delta[k]$$

II. 23.

g. és R.

IV E 1

4/4

3. hf

$$h[k] = \begin{cases} d & , k = 0 \\ \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{k-1} \underline{b} & , k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow h[k] = d\,\delta[k] +$$

$$+ \varepsilon[k-1] \cdot \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{k-1} \cdot \underline{b}$$

Állapotváltozós egyenletek

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u \\ y &= \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot u \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{FI} \quad \underline{x}'(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b}\, u(t) \\ &\qquad y(t) = \underline{c}^T \cdot \underline{x}(t) + d \cdot u(t) \\ &\text{DI} \quad \underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}[k] + \underline{b} \cdot u[k] \\ &\qquad y[k] = \underline{c}^T \cdot \underline{x}[k] + d \cdot u[k] \end{aligned}$$

$\underline{\underline{A}}, \underline{b}, \underline{c}^T, d$

megoldás:

$$\text{DI} \quad \underline{x}[k] = \underline{\underline{A}}^k \cdot \underline{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{A}}^{k-1-i} \cdot \underline{b} \cdot u[i]$$

FI állapotváltozós rendszer megoldása

T.f.h. megoldás

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}} \cdot t} \cdot \underline{x}(-0) + \int_{-0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\, \underline{b}\, u(\tau)\, d\tau$$

kezdeti feltétel

ha ismert $\underline{x}(-0)$, $u(t)$ $t \geq 0$ adott

$$\left\| \begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \\ e^{\underline{\underline{A}}} &= \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!} \underline{\underline{A}}^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \underline{\underline{A}}^n + \ldots \end{aligned} \right\|$$

$$\left\| \int_{-0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\, \underline{b}\, u(\tau) = e^{\underline{\underline{A}} t} \cdot \int_{-0}^{t} e^{-\underline{\underline{A}}\tau} \cdot \underline{b} \cdot u(\tau)\, d\tau \right.$$

$$\begin{aligned} \underline{x}'(t) &= \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}} t}\, \underline{x}(-0) + \\ &+ \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}} t} \cdot \int_{-0}^{t} e^{-\underline{\underline{A}}\tau} \cdot \underline{b} \cdot u(\tau)\, d\tau + \\ &+ \cancel{e^{\underline{\underline{A}} t}}\, \cancel{e^{-\underline{\underline{A}} t}} \cdot \underline{b}\, u(t) = \\ &= \underline{\underline{A}} \Big[\underbrace{e^{\underline{\underline{A}} t} x(-0) + \int_{-0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)} \cdot \underline{b} \cdot u(\tau)\, d\tau}_{x(t)} \Big] + \underline{b} \cdot u(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = \underline{c}^T \cdot e^{\underline{\underline{A}} t} x(-0) + \int_{-0}^{t} \underline{c}^T e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)} \cdot \underline{b}\, u(\tau)\, d\tau + d \cdot u(t)$$

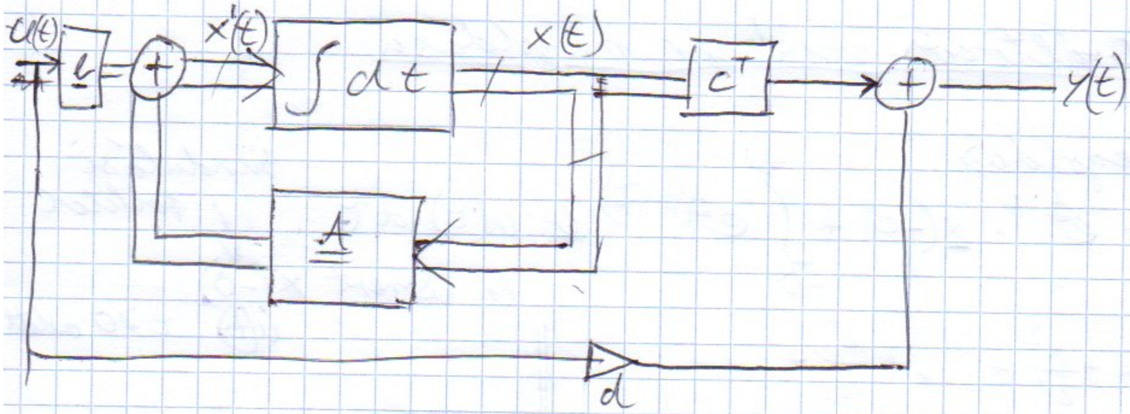
Impulzusválasz

$u(t) = \delta(t) \quad x(-0) = \underline{0}$ // energiamentes állapotból indulunk

$$h(t) = \underline{c}^T \int_{-0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)} \cdot \underline{b} \cdot \delta(\tau)\, d\tau + d \cdot \delta(t)$$

$$h(t) = c^T e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{b} \cdot \underbrace{\boxed{\int_{-0}^{t} \delta(\tau)\, d\tau}}_{\varepsilon(t)} + d \cdot \delta(t)$$

$$\boxed{h(t) = \varepsilon(t)\, \underline{c}^T e^{\underline{\underline{A}}t}\, \underline{b} + d \cdot \delta(t)}$$



1, Lépésenkénti megoldás

$$x(t_0 + \Delta t) \cong x(t_0) + \Delta t \cdot x'(t_0) = x(t_0) + \Delta t \overbrace{\left[\underline{\underline{A}} \cdot x(t_0) + b \cdot u(t_0)\right]}^{x'(t_0)}$$

előrelépő Euler

FI, DI áll. egyenletek megoldása mtx függvényekkel II.27. 3/4

$e^{\underline{\underline{A}}t}$ $\underline{\underline{A}}^t$

J. és R V. Ea 3. lap

$$f(\underline{\underline{A}}) = f(0)\cdot\underline{\underline{E}} + f'(0)\cdot\underline{\underline{A}} + \frac{f''(0)}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \ldots$$

Taylor formális alk.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$$e^{\underline{\underline{A}}\cdot t} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}\cdot\underline{\underline{A}}^i = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}}\cdot t + \underline{\underline{A}}^2\cdot\frac{t^2}{2!} + \ldots$$

Kérdés: kell-e ∞ tagot összegezni?

Ismétlés:

$A^{N\times N}$ sajátvektor, sajátérték

$$\boxed{\underline{\underline{A}}\cdot\underline{v} = \lambda\cdot\underline{v}} \Rightarrow (\underline{\underline{E}}\cdot\lambda - \underline{\underline{A}})\,\underline{v} = \underline{0}$$

triv mo.: $\underline{v} = \underline{0}$

nem triv. mo. létezik

, ha $|\lambda\cdot\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = 0$

$|\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}| = 0$

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_n = 0}$$

Kar. egyenlet $\Rightarrow$ saját értékek λ

Tétel: Cayley-Hamilton

Minden kvadratikus mtx. kielégíti a karakterisztikus egyenletét

$$\underline{\underline{A}}^N + d_1\cdot\underline{\underline{A}}^{N-1} + d_2\cdot\underline{\underline{A}}^{N-2} + \ldots + d_N\cdot\underline{\underline{E}} = 0$$

$\underline{\underline{E}}$ ✓ $\underline{\underline{A}}$ ✓ $\underline{\underline{A}}^2$ ✓ $\ldots$ $\underline{\underline{A}}^{N-1}$ ✓ mtx. szorzás eddig

$$\underline{\underline{A}}^N = -d_1\underline{\underline{A}}^{N-1} - d_2\underline{\underline{A}}^{N-2} - \ldots - d_N\underline{\underline{E}}$$ lineáris komb.

Lagrange mtx. alapú (interpolációs)

II. 27.

J. és R.
V. EA

4/4

3. hét

$$f(\underline{\underline{A}}^{N\times N}) = \sum_{i=1}^{N} f(\lambda_i)\cdot \underline{\underline{L}}_i$$

$$\underline{\underline{L}}_i = \prod_{\substack{p=1\\ p\neq i}}^{N} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_p \underline{\underline{E}}}{\lambda_i - \lambda_p}$$

Pl.: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\underline{\underline{A}}^{1000} = ?$

$$|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$

$$\underline{\underline{A}}^{1000} = \underbrace{\lambda_1^{1000}}_{1}\cdot L_1 + \lambda_2^{1000}\cdot L_2$$

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{\underline{\underline{A}} - 2\cdot\underline{\underline{E}}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}}_2 = \frac{\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{L}}_i = \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2^{1000} \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix} = \cancel{\text{...}} \begin{pmatrix} 1 & 2^{1000}-1 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix}$$

Lagrange mtx. tulajdonságai

$$f(\underline{\underline{A}}^{N\times N}) = \sum_{i=1}^{N} f(\lambda_i)\cdot \underline{\underline{L}}_i$$ ← Lagrange

$\underline{\underline{A}}^k$ $e^{\underline{\underline{A}}t}$

DI FI

$$\underline{\underline{L}}_i = \prod_{\substack{p=1\\ i\neq p}}^{N} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_p \underline{\underline{E}}}{\lambda_i - \lambda_p} \sim \underline{\underline{A}}^{N-1}, \underline{\underline{A}}^{N-2}, \dots, \underline{\underline{E}}$$

$\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{A}}^2, \dots, \underline{\underline{A}}^{N-1}$

Cayley-Hamilton

$$\underline{\underline{A}}^N + d_1 \underline{\underline{A}}^{N-1} + d_2 \underline{\underline{A}}^{N-2} + \dots + d_{N-1}\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{E}} = 0$$

$$\underline{\underline{A}}^N = \left(\underline{\underline{A}}^{N-1}, \underline{\underline{A}}^{N-2}, \dots, A^N, \underline{\underline{E}}\right)$$

$$A^{N+1} = \left(\quad - \ || \ - \quad \right)$$

Lagrange-mtx.-ok összege

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{L}}_i = \underline{\underline{E}} \qquad \underline{\underline{L}}_i \underline{\underline{L}}_j = \begin{cases} \underline{\underline{0}} & , \text{ha } i\neq j \\ \underline{\underline{E}} & , \text{ha } i=j \end{cases}$$

ortogonalitás

1. Pl.:

$$\underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^k \begin{bmatrix} 1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

2. Pl.:

III. 02.

f. és R. 2/5

VI. EA

4. LA

$$\underline{\underline{A}} \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad Fib[k] = \underbrace{\underline{c}^T}_{[0\ 1]} \cdot \underline{\underline{A}}^k \cdot \underbrace{\underline{x}[0]}_{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$$

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = \begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 1 = 0 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\lambda_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix}0-\lambda_2 & 1\\ 1 & 1-\lambda_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix}\frac{-(1-\sqrt{5})}{2} & 1\\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}}_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix}\frac{-(1+\sqrt{5})}{2} & 1\\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^k = \lambda_1^k \cdot \underline{\underline{L}}_1 + \lambda_2^k \underline{\underline{L}}_2$$

$$Fib[k] = (0, 1) \cdot \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix}\frac{-(1-\sqrt{5})}{2} & 1\\ \boxed{1} & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix}\frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1\\ \boxed{1} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a & b\\ \boxed{c} & d\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c & d\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = c$$

$$Fib[k] = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right]$$

III.02. 3/5 4.hét

J. és R. VI. EA

Stabilitás vizsgálat

1, Külső stabilitás (gerjesztés → válasz)

→ BIBO, GV, korl. gerjesztéshez → korl. válasz

gerjesztés-válasz

összefüggések

2, Belső stabilitás

→ Asszimptotikus stab. → $\boxed{\text{állapotváltozók} \xrightarrow[t\to\infty]{t\to\infty} 0}$

Ha a rendszert magára hagyjuk, akkor minden állapotváltozó 0-hoz tart

1, LTI $h(t)$, $h[k]$

lineáris idő invariáns

LTI akkor és csak akkor GV stabil, ha $\Leftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty \quad \text{ill.} \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$$

$\boxed{\text{DI}}$ $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty \Longrightarrow GV$

gerjesztés $|u[k]| < M_u \quad \forall k$

válasz: $|y[k]| = \left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \cdot u[k-i]\right| \leq$, ha LTI

$$\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| \cdot |u[k-i]| \leq M_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$$

$|u[k-i]| \leq M_u$

GV stabil

III.02.

J. és R.

II. EA 4/5

4. hét

3, GV $\Rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$

$$u[k] = \begin{cases} 1 & , h[-k] \geq 0 \\ -1 & , h[-k] < 0 \end{cases}$$

$$\underset{k=0}{y[0]} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \cdot u[\underset{0}{k}-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]|$$

$$G\forall \longrightarrow |y[0]| < \infty$$

1. HF rész

Pl.: FI $\quad h(t) = \varepsilon(t)\, e^{-0{,}5t} \cdot \cos(3t + 0{,}7)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} \left| e^{-0{,}5t} \cdot \cos(3t+0{,}7)\right| dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \underbrace{|e^{-0{,}5t}|}_{e^{-0{,}5t}} \cdot \underbrace{|\cos(3t+0{,}7)|}_{\leq 1}\, dt \leq \int_0^\infty e^{-0{,}5t}\, dt = \left.\frac{e^{-0{,}5t}}{-0{,}5}\right|_0^\infty = \frac{0-1}{-0{,}5} < \infty$$

2, Asszimptotikusan stabilitás

LTI <u>ASZ stabil</u>, ha a gerjesztetlen rendszer minden állapotváltozója 0-hoz tart tetsz. kezdeti állapot esetén

gerjesztetlen

$\boxed{\text{DI}}$ $\quad \underline{x}[k] = \underline{\underline{A}}^k \cdot x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{A}}^{k-1-i}\, \underline{b} \cdot \underset{0}{u[i]} = A^k \cdot x[0]$

$$\underline{x}[k] = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k \cdot \underline{\underline{L}}_i\, \underline{x}[0]$$

III.02.

J. és R. 5/5

VI. EA

4. hét

$\lambda_i^{k} = |\lambda_i|^{k} \cdot e^{j\varphi_i \cdot k}$

$\underline{x}[k] \to \underline{0}$

$\boxed{\text{ha } |\lambda_i| < 1}$

ASZ. stab. felt

$e^{\lambda_i t} \to 0$

FI

$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(-0) = \sum_{i=1}^{N} e^{\lambda_i t}\,\underline{\underline{L}}_i\,\underline{x}(-0)$

gerjesztetlen

$u(t) = 0$

$e^{\lambda_i t} = e^{\alpha_i t} \cdot e^{j\beta_i t}$

FI ASZ stab. feltétele $\alpha_i < 0$

$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$

1/5

1. ZH 8. hét

1. HF 7. hét péntek

5. hét

Stabilitás

$$ASZ \Longleftrightarrow \begin{cases} DI & |\lambda_i| < 1 \\ FI & Re\,\lambda_i < 0 \end{cases}$$

$\boxed{ASZ\ ?\ GV}$

Állítás

ASZ $\Longrightarrow$ GV stabil

Biz.:

DI $\quad h[k] = d\,\delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{k-1} \cdot \underline{b} \qquad \left\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{k-1} \underline{\underline{L}}_i \right.$

LTI $\quad \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| d \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underline{c}^T \cdot \underline{\underline{L}}_i \underline{b}}_{K_i} \lambda_i^{k-1} \right| \leq$

$$\leq |d| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ |K_1| \cdot |\lambda_1^{k-1}| + |K_2| \cdot |\lambda_2^{k-1}| + \ldots + |K_N| \cdot |\lambda_N^{k-1}| \right\} =$$

$$= |d| + \sum_{i=1}^{N} \overset{<\infty}{|K_i|} \overset{<\infty}{\frac{1}{1-|\lambda_i|}} < \infty$$

$\Downarrow$

GV stabil

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_i|^{k-1} \underset{\text{mértani sor}}{=} \frac{1}{1-|\lambda_i|} \right\|$$

ASZ $|\lambda_i| < 1$

Biz.:

$\boxed{FI}$

jés R III.09.
VII · EA 2/5

5. hét

$$h(t) = d\,\delta(t) + \varepsilon(t)\,\underline{c}^T e^{\underline{A}t} \cdot \underline{b} = d\,\delta(t) +$$

$$+ \varepsilon(t)\left[k_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \dots + k_N e^{\lambda_N t}\right]$$

$$\int_{-0}^{\infty} |h(t)|\,dt \le |d| + |k_1| \int_{-0}^{\infty} \left|e^{\lambda_1 t}\right| dt + \dots + |k_N| \int_{-0}^{\infty} \left|e^{\lambda_N t}\right| dt =$$

$$\left\| \; \left|e^{\lambda_i t}\right| = \left|e^{Re(\lambda_i)t}\right| \cdot \left|\underbrace{e^{j Im \lambda_i t}}_{1}\right| = e^{Re(\lambda_i)t} \; \right\|$$

$$= |d| + |k_1| \cdot \int_{-0}^{\infty} e^{Re(\lambda_1)t}\,dt + \dots + |k_N| \int_{-0}^{\infty} e^{Re(\lambda_N)t}\,dt < \infty$$

korlátos GV stabil

$\boxed{ASZ}$ $Re(\lambda_i) < 0$

$$\left\| \; \int_{-0}^{\infty} e^{-\alpha_i \tau}\,d\tau = \left.\frac{e^{-\alpha_i \tau}}{-\alpha_i}\right|_{-0}^{\infty} = \frac{0-1}{-\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i} < \infty \; \right\|$$

III. 09.

J. és R 3/5

VII. FA 5. hét

Stabilitási kritériumok

Kiindulás karakterisztikus egyenlet

$(N=2)$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 =$$
$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0$$

Megoldás: a) két valós $\lambda_1 \neq \lambda_2$

b) két komplex $\lambda_1 = \lambda_2^*$

$\boxed{FI}$ $ASZ \leftrightarrow \boxed{Re(\lambda_i) < 0}$

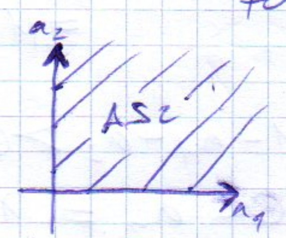
$a_1 = ?$ $a_2 = ?$

a) $\boxed{\begin{array}{l} a_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ a_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 \end{array}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} a_2 > 0 \\ a_1 > 0 \end{array}}$

b) $a_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_1^* > 0$

$a_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 =$
$= -\lambda_1 - \lambda_1^* = -2\,Re\{\lambda_1\} > 0$

$\boxed{N=2}$ ASZ szüks. és elégs. feltét.



Routh–Hurwitz kritérium

H mátrix

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & 1 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \; \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \emptyset \; \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \; \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \; \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \;\; \ddots \end{array}$$

1. $a_1 > 0$
2. $a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$
3. $(a_1 a_2 a_3 - a_1 a_4) - (a_3^2 - a_1 a_5) > 0$

$a_1 \neq 0$ $a_2 \neq 0$

$\boxed{a_1 > 0}$ $a_1 a_2 > 0 \rightarrow \boxed{a_2 > 0}$ ✓

DI stabilitás kritérium

$ASZ \leftrightarrow |\lambda_i| < 1$

a) valós

$$1 + a_1 + a_2 = 1 + \overbrace{(-\lambda_1 - \lambda_2)}^{a_1} + \overbrace{\lambda_1 \lambda_2}^{a_2} = \underbrace{(1-\lambda_1)}_{0< \ <2}\underbrace{(1-\lambda_2)}_{0< \ <2} > 0$$

$$1 - a_1 + a_2 = \underbrace{(1+\lambda_1)}_{0< \ <2}\underbrace{(1+\lambda_2)}_{0< \ <2} > 0$$

$$-1 < a_2 = \lambda_1 \lambda_2 < 1$$

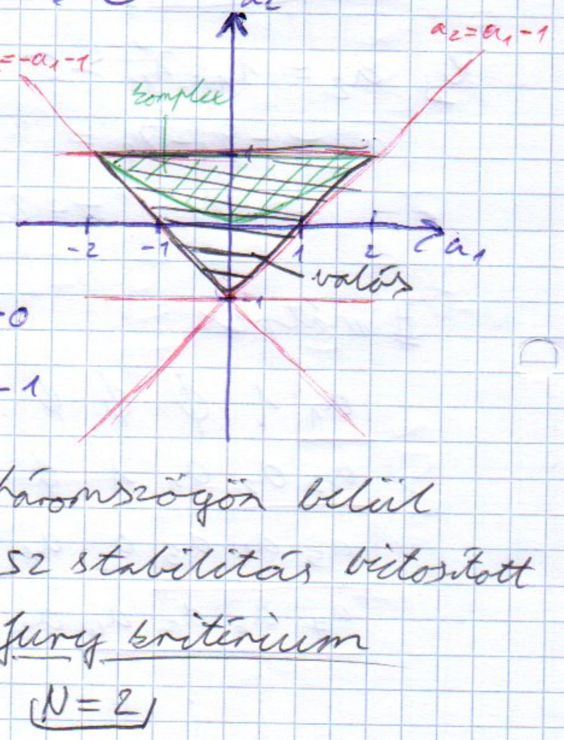
b) $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

$$1 + a_1 + a_2 = 1 + \overbrace{(-\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)}^{-Re(\lambda_1)} + \overbrace{\lambda_1 \bar{\lambda}_1}^{>0} = (1-\lambda_1)(1-\bar{\lambda}_1) =$$

$$= (1-\lambda_1)\cdot\overline{(1-\lambda_1)} = |1-\lambda_1|^2 > 0$$

$$1 - a_1 + a_2 > 0$$

$$0 < a_2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 < 1$$



$1 + a_1 + a_2 > 0$

$a_2 > -a_1 - 1$

A háromszögön belül ASZ stabilitás biztosított

Jury kritérium

(N=2)

Jelfolyam hálózatok

Rendszer
- állapotváltozós rendszer ⇒ stab., szimuláció
- jelf. hálózat ⇒ tervezés, szintézis, szemléletes

ok ⇒ okozat kapcsolat

irányított gráf

Minimálisan szükséges elemek

LTI, kauzális

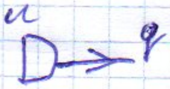
Forrás (gerj.), **Nyelő** (válasz)

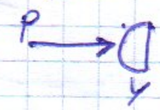
Erősítő

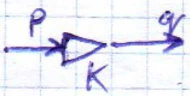
DI **késleltető**

FI **integráló**

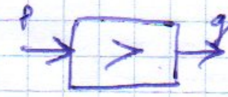
Elemek karakterisztikája

Forrás  $q = u$

Nyelő  $y = p$

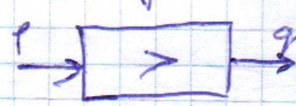
Erősítő  $q = K \cdot p$

Késleltető



$q[k] = p[k-1]$

Integráló



$q(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau$

$p(t) = q'(t)$

Összekapcsolásból eredő kényszerek

Összeadó

$q = \sum_{i=1}^{N} p_i$

csomópont

$q_i = p$

Példa: ASZ $\Rightarrow$ GV

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$\left| \lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}} \right| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2) \qquad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 2$$

nem ASZ

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + u$$

$$h(t) = d \cdot \delta(t) + \varepsilon(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ e^{-2t} \overset{\underline{\underline{L}}_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + e^{2t} \overset{\underline{\underline{L}}_2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

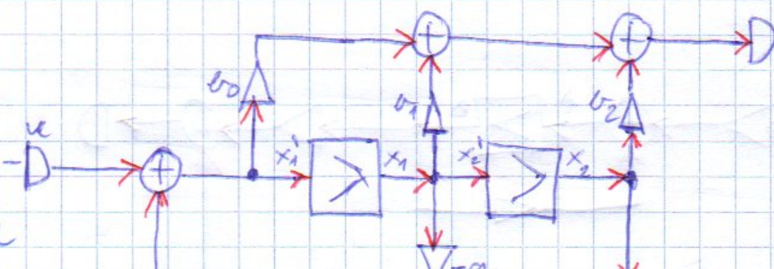
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{h(t) = \delta(t) + \varepsilon(t)\, e^{-2t}} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt \le \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt}_{1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\, dt}_{\left.\frac{e^{-2t}}{-2}\right|_0^\infty = \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{GV}$$

2. kanonikus



$$x_1' = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + u$$

$$x_2' = x_1$$

$$y = b_0 x_1' + b_2 x_1 + b_2 x_2 =$$

$$= (b_1 - b_0 a_1)\, x_1 + (b_2 - b_0 a_2)\, x_2 + b_0 u$$

A

Á.V. $\longrightarrow$ Rendszeregy.

III.16.
J. és R.
VIII. Ea
2/4
6. Lét

$$u = x_1' + a_1 x_1 + a_2 x_2 \qquad y = b_0 x_1' + b_1 x_1 + b_2 x_2$$
$$u' = x_1'' + a_1 x_1' + a_2 x_2' \qquad y' = b_0 x_1'' + b_1 x_1' + b_2 x_2'$$
$$u'' = x_1''' + a_1 x_1'' + a_2 x_2'' \qquad y'' = b_0 x_1''' + b_1 x_1'' + b_2 x_2''$$

$$\Downarrow$$

$$(u, u', u'' \ldots, y, y', y'')$$

*

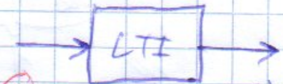
$$y'' = b_0\left(u'' - a_1 x_1'' - a_2 x_2''\right) + b_1\left(u' - a_1 x_1' - a_2 x_2'\right) + b_2 x_2''$$

$\downarrow$ sok levezetéssel

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 u'' + b_1 u' + b_2 u}$$

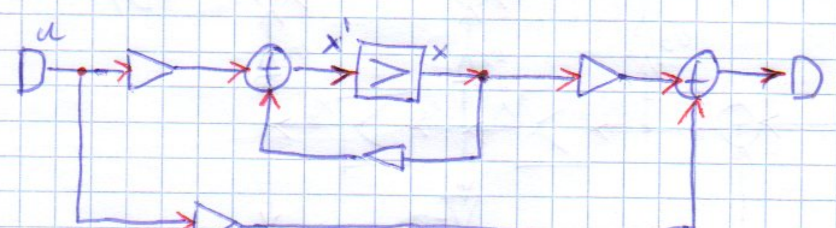
Szinuszos gerjesztés állandósult állapota

LTI
ASZ



$u(t) = U \cos(\omega t)$ $\qquad$ $y(t) = Y \cos(\omega t + \varphi)$

Pl.: $\boxed{\text{FI}}$



$$x' = ax + bu \Rightarrow x(t) = x_f(t) + x_g(t)$$
$$y = cx + du$$

x_f: szabad válasz (Hált)

x_g: gerjesztett válasz (I_{par})

$$x_f(t) = c_1 \cdot e^{at} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \qquad a < 0$$

$$x_g(t) = X \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$x' = ax + bu$$
$$-X\omega \sin(\omega t + \phi) = a \cdot X \cdot \cos(\omega t + \phi) + U \cos(\omega t + \varphi)$$

$X = ?$ $\quad$ $\Phi = ?$

III. 16.

J. és R.

VIII. EA 3/4

6. hét

Komplex leírás

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{U e^{j(\omega t+\varphi)}\} = $$
$$= \mathrm{Re}\{U e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\}$$

Komplex amplitúdó

$$\boxed{\bar{U} = U e^{j\varphi}} \approx \text{fazor}$$

$$x' = ax + bu \qquad \left.\begin{array}{l} x(t) = X\cdot\cos(\omega t + \phi_x) \\ u(t) = U\cdot\cos(\omega t + \phi_u)\end{array}\right\}$$

$$\{\mathrm{Re}\{\bar{X}\cdot e^{j\omega t}\}\}' = a\{\mathrm{Re}\{\bar{X} e^{j\omega t}\}\} + b\cdot\{\mathrm{Re}\{\bar{U}\cdot e^{j\omega t}\}\}$$

$$\cancel{\mathrm{Re}}\{\bar{X}\cdot j\omega\cdot \cancel{e^{j\omega t}}\} = \cancel{\mathrm{Re}}\{\cancel{e^{j\omega t}}\cdot a\cdot\bar{X} + b\cdot\bar{U}\cdot\cancel{e^{j\omega t}}\}$$

$$j\omega\bar{X} = a\bar{X} + b\bar{U} \qquad j = e^{j\pi/2}$$
$$\bar{X}(j\omega - a) = b\bar{U}$$
$$\boxed{\bar{X} = \frac{b}{j\omega - a}\bar{U}}$$

FI

$$\left.\begin{array}{l}\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\underline{x} + \underline{b}u \\ y = \underline{c}^T\underline{x} + du\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{amplitúdó}]{\text{komplex}} \left.\begin{array}{l} j\omega\cdot\bar{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}\bar{\underline{X}} + \underline{b}\bar{U} \\ \bar{Y} = \underline{c}^T\bar{\underline{X}} + d\bar{U}\end{array}\right\}$$

Milyen kapcsolat $\bar{U}$ és $\bar{Y}$ között?

$$\bar{\underline{X}} = \begin{bmatrix}\bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_n\end{bmatrix}$$

$$j\omega\cdot\bar{\underline{X}} - \underline{\underline{A}}\bar{\underline{X}} = j\omega\underline{\underline{E}}\bar{\underline{X}} - \underline{\underline{A}}\bar{\underline{X}} = (j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\bar{\underline{X}} = \underline{b}\cdot\bar{U}$$

$$(j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}(j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\cdot\bar{\underline{X}} = (j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b}\cdot\bar{U}$$

$$\bar{\underline{X}} = (j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b}\bar{U}$$

$$\bar{Y} = \underline{c}^T(j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b}\cdot\bar{U} + d\bar{U}$$

$$\boxed{H = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \underline{c}^T(j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b} + d} \quad \text{átviteli tényező}$$

III.16. J.cs.R. VIII.EA 4/4 6.Lét

LTI
ASZ

Pl.: adott $\overline{H} = 0{,}5 \cdot e^{j0{,}3}$

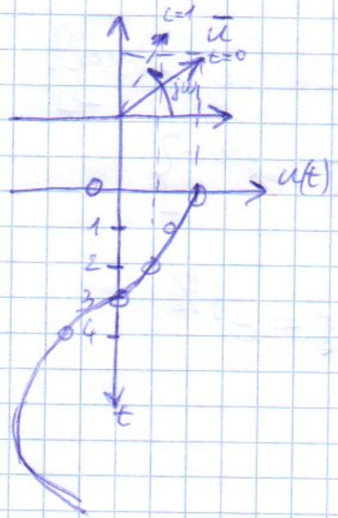
$u(t) = 3 \cdot \cos(\omega t + \pi/3) \Rightarrow \overline{U} = 3 \cdot e^{j\pi/3}$

$y(t) = ?$ állandósult áll.

$\overline{Y} = \overline{H} \cdot \overline{U} = 0{,}5 \cdot e^{j0{,}3} \cdot 3 \cdot e^{j\pi/3} = 1{,}5 \cdot e^{j(0{,}3+\pi/3)}$

$y(t) = 1{,}5 \cos(\omega t + 0{,}3 + \pi/3)$

$u(t) \Rightarrow \overline{U}$ $\qquad$ $\overline{U}\, e^{j\omega t}$



$\mathrm{Re}\{\overline{U}\, e^{j\omega t}\} = u(t)$