Bevezetés a számításelméletbe II.

1. zárthelyi anyaga

Gráfelméleti alapfogalmak

D: Euler-kör

Olyan zárt élsorozat, amely G minden élét pontosan egyszer tartalmazza. (nem kör!)

D: Euler-út

Nyílt, vagy zárt élsorozat, amely G minden élét pontosan egyszer tartalmazza. (nem út!)

T: Ha G-ben van Euler-kör → minden pont foka páros. (visszafelé nem igaz!)

T: G összefüggő gráf

$$\exists\, Euler-kör \Leftrightarrow \forall pont\ foka\ páros$$

T: G összefüggő gráf

$\exists\, Euler-út \Leftrightarrow$ 0, vagy 2db páratlan fokú pont van

D: Hamilton-kör

Kör, ami G minden csúcsát tartalmazza.

D: Hamilton-út

Olyan út, ami G minden csúcsát tartalmazza.

T:

G-ben létezik Hamilton-kör $\Rightarrow$ G-ből bárhogy k db pontot kitörölve a keletkező gráfnak ≤ k db öszefüggő komponense lesz.

T:

G-ben létezik Hamilton-út $\Rightarrow$ G-ből bárhogy k db pontot kitörölve a keletkező gráfnak ≤ k+1 db öszefüggő komponense lesz.

T: Dirac

Ha G n csúcsú, egyszerű gráf, és minden pont foka legalább $\frac{n}{2} \Rightarrow \exists$ Hamilton-kör!

T: Ore

G n csúcsú, egyszerű gráf

Ha minden nem szomszédos pontpárra teljesül (x,y), hogy a fokszámok összege a csúcsok száma:

$$d(x)+d(y)\geq n \Rightarrow G-ben\ \exists\ Hamilton-kör$$

Színezések

D: A G egyszerű gráf k színnel kiszínezhető, ha a csúcsai megszínezhetőek k színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek.

D: A G *kromatikus száma* k, ha G k színnel megszínezhető, de (k-1)-el nem.

Jele: $\chi(G)=k$

D: G páros gráf, ha a csúcsai két osztályba sorolhatóak (A és B), ha minden él A beli és B beli csúcsokat köt össze. Jele: G(A, B; E)

T:

$$G\ páros \Leftrightarrow \neg\exists\ páratlan\ hosszú\ kör$$

D: $\omega(G)$ a maximális klikkméret.

$\omega(G)$ = k, ha létezik G-ben k db csúcs, amelyek közül bármelyik kettő szomszédos, de k+1 ilyen csúcs már nem.

T: $\omega(G)\leq\chi(G)$

T: $\forall k\geq 3: \exists G_k, amire\ \omega(G)=2 \wedge \chi(G)=k$

Mycielsky:

1, van egy gráfod élekkel mindennel

2, egy másik lapra átmásolod a pontjait és az új lapon levő pontokat összekötöd azokkal amelyek az eredeti lapon voltak a megfelelő ponttal szomszédosak

3, egy harmadik lapon egy pontot rajzolsz és összekötöd a 2. lap összes pontjával

ez azért jó mert így biztosan olyan gráfot kapsz aminek omega(G)=2 de k lépés után khi(g)=k

D: Mohó színezés

1. Rendszerezzük a színeket (számozással)
2. Egy találomra választott csúcsot a legkisebb sorszámúval színezünk meg
3. Mindig a legkisebb sorszámú, nem szomszédos (nem szereplő) színnel színezzük meg az adott csúcsot

D: $\Delta(G)$ a maximális fokszám.

T: A mohó színezés $\leq\Delta(G)+1$ színt használ $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)+1$

T: Brooks

Ha G összefüggő, nem K_n, akkor nem C_{2k+1} $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$

T: Négyszíntétel

G síkbarajzolható $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

T: Ötszíntétel

G síkbarajzolható, egyszerű $\Rightarrow \chi(G) \leq 5$

Perfekt gráfok

D: G perfekt, ha $\chi(G) = \omega(G)$, továbbá G minden H feszített részgráfjára is teljesül a feltétel.

T: Minden páros gráf perfekt.

T: G perfekt, ha nem tartalmaz C_{2k+1} -et, vagy annak komplementerét, mint feszített részgráf.

T: Gyenge gráf sejtés: ha G perfekt, akkor a komplementere is perfekt.

Intervallum gráfok

D: csúcsai $I_1, I_2, \ldots, I_n$ zárt intervallumok. Élei: $I_i \cap I_j \neq 0 \leftrightarrow v_i$ *és* v_j között él vezet.

T: Minden intervallum gráf perfekt.

Élszínezések

D: $\chi_e(G) = k$, ha G élei k színnel kiszínezhetőek úgy, hogy a szomszédos élek különböző színűek legyenek, de (k-1)-el már nem.

T: $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$

T: Vizing, csak egyszerű gráfokra

G egyszerű gráf $\Rightarrow \chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$

Irányított gráfok

T: Irányított $\vec{G}$ gráf emeletekre bontható $\Leftrightarrow$ ha nincs benne irányított kör (aciklikus).

Párosítások

D:

$M \subseteq E(G)$ *párosítás* = független részhalmaz, ha semelyik két M-belinek nincs közös végpontja.

M lefedi a végpontjainak halmazát.

M *teljes párosítás,* ha minden csúcsot lefed a gráfban.

D:

$X \subseteq V(G)$ lefogó ponthalmaz, ha a gráf $\forall e \in E(G)$-re az e legalább egyik végpontja X beli.

$\tau(G) =$ a lehető legkisebb lefogó ponthalmaz mérete. (lefogó pontok minimális száma)

T: $\left.\begin{matrix} M \ \textit{független élhalmaz} \\ X \ \textit{lefogó ponthalmaz} \end{matrix}\right\} |M| \leq |X|$

T: $\nu(G) \leq \tau(G)$

D: Magyar módszer

1. Független élek felvétele, amíg lehet
2. Javító út -> növelés amíg lehet
   a. Javítóút Mre nézve: 1, párosítatlan fiuból indul 2, minden él M beli 3, párosítatlan lányban ér véget
3. ha nincs több javítóút akkor stop

D: Alternáló út: minden második él van benne csak.

T: Ha az algoritmus megáll, akkor maximális méretű a párosítás

T: König

$$G\ páros \Rightarrow \nu(G) = \tau(G)$$

T: Hall: G(F, L; E) páros gráf

$\exists$ F-et lefedő párosítás $\Leftrightarrow \forall X \subseteq F : |N(X)| \geq |X|$

T: Fobenius: G(F, L; E) páros gráf

$\exists$ F-et lefedő párosítás $\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ |F| = |L| \\ 2)\ \forall X \subseteq F,\ |N(X)| \geq |X| \\ 3)\ \forall X \subseteq F,\ X\ reguláris \end{cases}$

D: $C_p(G)$ = Páratlan csúcsú komponensek száma

T: Tutte

$\exists$ teljes párosítás G-ben $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall X \subseteq V(G) \\ C_p(G - X) \leq |X| \end{cases}$

D:

	független (max)	lefogó (min)
élek	ν	δ
pontok	α	τ

T: $\nu \leq \tau \wedge \alpha \leq \delta$

T: Gallai I.

G hurokél mentes $\Rightarrow \alpha()G + \tau(G) = n$

T: Gallai II.

G izolált pont mentes $\nu(G) + \delta(G) = n$

Hálózati folyamok

D: $\vec{G}(V, \vec{E})$, s (termelő), t (fogyasztó) $\in V$, C (kapacitás) : E → $R^{+,0}$

D: folyam

f : E → $R^{+,0}$

1. $\forall c - re\ 0 \leq f(e) \leq c(e)$
2. $\forall v \in V \setminus \{s, t\}$

   $\sum \{f(e) \mid belépő\ \ folyam\} = \sum \{f(e) \mid kilépő\ \ folyam\}$

D: A folyam értéke

$m_f = \sum \{f(e) \mid s - böl\ kilépő\ \ folyam\} - \sum \{f(e) \mid s - be\ bejövő\ \ folyam\}$ = … (ugyanez t-re)

D: (s,t) vágás (nem ekvivalens a régebben definiált vágással)

$X \leq V, s \in X, t \notin X$, jele: C

Azon élek halmaza, amelyek X és V-X között mennek, (s,t) vágás.

D: vágásérték

$c(C) = \sum\{c(e) \mid X \text{ és } V - X \text{ között menő él folyamértéke}\}$

T: f folyam, C vágás, akkor $m_f \leq c(C)$

T: maximális folyamérték ≤ minimális vágásérték

D: algoritmus maximális folyamérték keresésére

1. Kiindulunk bárhonnan - tetszőleges folyam
2. Javítás ismétlődik, amíg lehet
3. STOP, ha nem lehet már javítani

Javítás:

Rajzoljunk egy segéd gráfot, amelynek a csúcsai egyezzenek meg az eredeti gráf csúcsaival.

a) $\overrightarrow{xy} \in E(H_f)$, ha $f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$

b) $\overrightarrow{yx} \in E(H_f)$, ha $f(\overrightarrow{xy}) > 0$

D: javítóút

H_f-ben s-ből t-be tartó út. A megfelelő élek értékeit növel kell, vagy csökkenteni attól függően, hogy az úttal megegyezik, vagy ellentétes az irányuk.

T: Ha H_f-ben nincs javítóút, akkor a folyam maximális.

T: Ford, Fulkson

maximális folyamérték = minimális vágás

T: Edmunds, Karl

Ha H_f-ben a legrövidebb javító utat veszem s-ből t-be, akkor véges sok lépésben leáll az algoritmus, sőt, polinomiális lesz.

T: Egészértékűségi lemma

Ha minden élen a kapacitás egész, akkor létezik olyan maximális folyam, amely minden élen egész értékű.

D: $X \subseteq E(\overrightarrow{G})$ lefogja az s-t irányított utakat, ha minden s-t út legalább egy X beli élt tartalmaz.

T: Menger I.

s-t éldiszjunkt irányított utak maximális száma = s-t irányított utakat lefogó élek minimális száma

T: Menger II.

s-t éldiszjunkt irányítatlan utak maximális száma = s-t irányítatlan lefogó élek minimális száma

D: $Y \subseteq V(\overrightarrow{G})$ lefogja az s-t utakat, ha minden s-t irányított út átmegy legalább egy Y-ba tartozó csúcson ($s, t \notin Y$).

T: Menger III.

s-t páronként pontdiszjunkt irányított utak maximális száma = s-t irányított utakat lefogó pontok minimális száma

T: Menger IV. G irányítatlan, s-t nem szomszédos,

s-t pontdiszjunkt irányítatlan utak maximális száma = s-t irányítatlan lefogó pontok minimális száma