Megoldókulcs, Valószínűségszámítás vizsga

2010.06.18.

2. változat

1. *Először feldobunk két szabályos érmét. Ha nincs fej, egyszer, ha van fej, négyszer dobunk fel egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos? (20 pont)*

Megoldás. A teljes valószínűség tételét használjuk, a következő események bevezetésével (3 pont):

$$\begin{aligned} A &: \text{ van fej} \\ B &: \text{ van hatos} \end{aligned}$$

Az érmedobással kapcsolatos valószínűségek (5 pont):

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= \frac{1}{4} \\ P(A) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

A kockadobással kapcsolatos feltételes valószínűségek (5 pont):

$$\begin{aligned} P(B|A) &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ P(B|\bar{A}) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Innen kiszámítható a végeredmény (7 pont a TVT felírásáért):

$$P(B) = \frac{1}{6}\frac{1}{4} + \left(1 - \left(\frac{11}{36}\right)^4\right)\frac{3}{4} \approx 0.43$$

2. *Milyen c értékre lesz a következő függvény sűrűségfüggvény? Határozza meg azon változó várható értékét, amelynek a sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} ce^{|x|} & \text{, ha } x \in [-2, 1] \\ 0 & \text{, különben.} \end{cases}$$

(20 pont)

Megoldás. A következőnek kell teljesülnie (3 pont):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

A konkrét esetben:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-2}^{1} ce^{|x|}dx \overset{(4 \text{ pont})}{=} \int_{-2}^{0} ce^{-x}dx + \int_{0}^{1} ce^{x}dx = \\ &= \left[-ce^{-x}\right]_{-2}^{0} + \left[ce^{x}\right]_{0}^{1} = -c + ce^2 + ce - c = \\ &\overset{(2 \text{ pont})}{=} c\left(e + e^2 - 2\right) = 1, \end{aligned}$$

ahonnan (1 pont)

$$c = \left(e + e^2 - 2\right)^{-1}.$$

A várható érték (a képlet önmagában 3 pont):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= c\int_{-2}^{1} xe^{|x|}dx = c\int_{-2}^{0} xe^{-x}dx + c\int_{0}^{1} xe^{x}dx = \\
&\overset{(5\ \text{pont})}{=} c\left(\left[-xe^{-x}\right]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} e^{-x}dx + [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) = \\
&= c\left(-2e^2 - \left[e^{-x}\right]_{-2}^{0} + e - [e^x]_0^1\right) = \\
&= c\left(-2e^2 - 1 + e^2 + e - e + 1\right) \overset{(2\ \text{pont})}{=} -ce^2 = -\frac{e^2}{e^2 + e - 2} \approx -0.911
\end{aligned}$$

3. *Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = X + 2Y$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét! (20 pont)*

Megoldás konvolúcióval. Könnyen belátható, hogy $2Y \in U(0,2)$ (3 pont), ezután kiszámolhatjuk a konvolúciós sűrűségfüggvényt:

$$\begin{aligned}
f_{X+2Y}(t) &\overset{(5\ \text{pont})}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_{2Y}(\tau) f_X(t-\tau)d\tau \overset{(5\ \text{pont})}{=} \int_{\max\{0,t-1\}}^{\min\{t,2\}} \frac{1}{2}d\tau \overset{(2\ \text{pont})}{=} \frac{1}{2}\left(\max\{0,t-1\} - \min\{t,2\}\right) \\
&\overset{(5\ \text{pont})}{=} \begin{cases} 0 & ,\text{ha } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & ,\text{ha } t \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & ,\text{ha } t \in [1,2) \\ \frac{1}{2}(3-t) & ,\text{ha } t \in [2,3) \\ 0 & ,\text{ha } t \geq 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Megoldás geometriai módszerrel. Ábrázoljuk a $[0,1] \times [0,1]$ halmazon a következő területet t lehetséges értékeire:

$$X + 2Y < t.$$

Ezen területek adják meg a $P(X + 2Y < t) = F_{X+2Y}(t)$ valószínűségeket (10 pont). Kiszámolható, hogy a területek értékei t különféle értékeire a következőképp számolhatók (8 pont):

$$\begin{aligned}
t < 0: &\quad 0, \\
t \in [0,1): &\quad \frac{t^2}{4}, \\
t \in [1,2): &\quad \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}, \\
t \in [2,3): &\quad 1 - \frac{1}{4}\left(t^2 - 6t + 9\right), \\
t \geq 3: &\quad 1.
\end{aligned}$$

Innen deriválással kapható a sűrűségfüggvény (2 pont).

4. *Dobjunk négyszer egy szabályos dobókockával! Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros dobások számát! Számolja ki az $\mathbb{E}[X|Y]$ regressziót! (20 pont)*

Megoldás. Számoljuk ki Y feltételes eloszlását az $Y = y$ feltétel mellett (az összes $x \leq y$ értékre):

$$\begin{aligned}
P(X = x|Y = y) &\overset{(5\ \text{pont})}{=} \frac{P(Y = y, X = x)}{P(Y = y)} = \frac{\frac{4!}{x!(y-x)!(4-y)!}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{2}{6}\right)^{y-x}\left(\frac{3}{6}\right)^{4-y}}{\frac{4!}{y!(4-y)!}\left(\frac{3}{6}\right)^y\left(\frac{3}{6}\right)^{4-y}} \\
&= \frac{y!}{x!(y-x)!}\left(\frac{6}{3}\right)^y\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{2}{6}\right)^{y-x}
\end{aligned}$$

$$\overset{(8\text{ pont})}{=} \binom{y}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{y-x},$$

amivel beláttuk, hogy $Y-X$ feltételes eloszlása az $X=x$ feltétel mellett binomiális, konkrétan $B\left(y,\frac{1}{3}\right)$ (2 pont, ha a fenti bizonyítás nélkül jön erre rá, akkor az eddigi 15 pont helyett 12 jár.). Innen adódik tehát, hogy (5 pont)

$$\mathbb{E}\left[Y|X=x\right]=\frac{x}{3},$$

azaz

$$\mathbb{E}\left[Y|X\right]=\frac{X}{3}.$$

5. *Legyen $X\in N(4,1)$, $Y=2X-8$, $Z=5-X$. Számolja ki az $R(Y,Z)$ korrelációs együtthatót! (10 pont)*

Megoldás. Jól látszik, hogy Y és Z között lineáris a kapcsolat:

$$\begin{aligned} X &= 5-Z \\ Y &= 2X-8=10-2Z-8=2-2Z. \end{aligned}$$

Innen következik, hogy $|R(Y,Z)|=1$ (7 pont), és mivel a fenti kifejezésben Z együtthatója negatív, így $R(Y,Z)=-1$ (3 pont).

6. *Hogyan számoljuk homogén Markov-láncoknál a t-edik időpontbeli abszolút eloszlást a kezdeti eloszlás és az egylépéses átmenetvalószínűség-mátrix segítségével? (10 pont)*

Megoldás. Legyen $X_0,X_1,X_2,\dots$ n állapotú Markov-lánc Π átmenetvalószínűség-mátrixszal, melynek elemei (2 pont):

$$[\Pi]_{ij}=p_{ij}=P(X_1=j|X_0=i)\quad(1\le i,j\le n).$$

Legyen a kezdeti eloszlás sorvektora $\mu^{(0)}$, ahol (0.5 pont)

$$\mu_i^{(0)}=P(X_0=i)\quad(1\le i\le n),$$

a t-edik ($t\ge 0$) időpontbeli abszolút pedig eloszlás sorvektorát pedig jelölje $\mu^{(t)}$ (0.5 pont):

$$\mu_i^{(t)}=P(X_t=i)\quad(1\le i\le n).$$

Ekkor tetszőleges $t\ge 0$ esetén fennáll a következő (8 pont):

$$\mu^{(t)}=\mu^{(0)}\Pi^t$$