

Valószínűségszámítás pótzárthelyi  
2015. április 17.

1. A 32 lapos magyar kártyacsomagból véletlenszerűen kihúzzunk 5 kártyát. Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy mind az öt lap azonos színű lesz, vagy annak, hogy az öt lap között 4 azonos figurájú (pl. 4 király vagy négy hetes) kártya lesz?

*Megoldás:* A két esemény valószínűsége azonos. Annak az eseménynek, hogy mindegyik lap azonos színű a kedvező esetei:  $4 \cdot \binom{8}{5} = 224$ , annak pedig, hogy lesz négy azonos figurájú az öt lap között:  $8 \cdot 28 = 224$ . Az összes eset mindkét eseménynél azonos:  $\binom{32}{5} = 201\,376$ .

2. Egy 20 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos hálózatra leejtünk 10 darab 2 cm átmérőjű kör alakú pénzdarabot. \*Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5 pénzdarab valamelyik négyzet csúcsát fogja lefedni?

*Megoldás:* Annak esélye, hogy egy pénzdarab lefedjen egy csúcsot:  $p = \frac{\pi}{400}$ . A csúcsot lefedő érmék száma binomiális eloszlású  $n = 10$  és  $p$  paraméterekkel. Így a keresett valószínűség:  $\sum_{i=5}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{\pi}{400}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{\pi}{400}\right)^{10-i}$ .

3. Az  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

$Y \setminus X$	-1	0	1
-1	$p$	$p$	$10p$
1	$10p$	$10p$	$20p$

Mekkora a  $p$  paraméter értéke? Függetlenek-e  $X$  és  $Y$ ? Számolja ki  $X$  várható értékét és szórását!

*Megoldás:*  $52p = 1 \implies p = \frac{1}{52}$ . Mivel pl.  $\mathbf{P}(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{52}$ ,  $\mathbf{P}(X = -1) = \frac{11}{52}$ ,  $\mathbf{P}(Y = -1) = \frac{12}{52}$  és  $\mathbf{P}(X = -1, Y = -1) \neq \mathbf{P}(X = -1) \cdot \mathbf{P}(Y = -1)$ , ezért a két változó NEM függetlenek!

$\mathbf{E}X = -11p + 30p = \frac{19}{52}$ ,  $\mathbf{E}X^2 = 11p + 30p = \frac{41}{52} \implies \sigma^2 X = \frac{41}{52} - \frac{361}{2704} = \frac{1771}{2704} \implies \sigma X \approx \frac{42,08}{52} \approx 0,81$ .

4. Legyen  $X$  exponenciális eloszlású  $\lambda = 1$  paraméterrel és  $Y$  normális eloszlású  $m = -1$  és  $\sigma = 3$  paraméterrel.  $X$  és  $Y$  független valószínűségi változók. Adja meg  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvényét! Számolja ki a  $Z = X + 2Y$  valószínűségi változó várható értékét és szórását!

*Megoldás:*  $f_{X,Y}(u,v) = e^{-u} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-\frac{(v+1)^2}{18}}$ ,  $u > 0, v \in \mathbb{R}$ .

$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X + 2\mathbf{E}Y = 1 - 2 = -1$ ,  $\sigma^2 Z = \sigma^2 X + 4\sigma^2 Y = 1 + 36 = 37 \implies \sigma Z = \sqrt{37}$ .

5. Legyen  $X \in U(0, 1)$ , és  $Y = \sqrt{5X + 1}$ . Adja meg  $Y$  sűrűségfüggvényét!

*Megoldás:*  $R_Y = [1, \sqrt{6}]$

$$F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(X < \frac{t^2-1}{5}\right) = \frac{t^2-1}{5} \implies f_Y(t) = F'_Y(t) = \frac{2t}{5}, t \in (1, \sqrt{6}), (f_Y(t) = 0, \text{ egyébként})$$