Molnár Martin – BME VIK
2017.11.14.

Számítástudomány alapjai II. ZH segédlet

Gráfszínezések

Egy G gráf **k-színezése** a csúcsok k db színnel történő olyan kiszínezése, hogy utána minden él különböző színű csúcsok között fut.
K-színezhető egy G gráf, ha minden csúcs kiszínezhető k adott szín valamelyikére, úgy hogy minden szomszédos csúcs különböző színű. G gráf akkor k-színezhető, ha létezik k-színezése.
Kromatikus szám χ(G)=k, ha G k-színezhető, de nem (k-1)-színezhető. A kromatikus szám tehát az ilyesfajta színezéshez szükséges minimális mennyiségű színt jelöli.
Ha G hurokélt tartalmaz, akkor nem színezhető. Egy színezés után az azonos színűre színezett csúcsok halmazt alkotnak; ez a **színosztály**.
Klikk: a G teljes részgráfja. $\omega(G)$ **klikkszám** a G legnagyobb klikkjének pontszáma, azaz $\omega(G)=k$, ha G-ben van k méretű, de nincs k+1 méretű klikk.
Nevezetes kromatikus számok:

1. n pontú teljes gráfra: χ(Kn) = n és ω(Kn) = n
2. n pontú körre: χ(Cn) = ha páros: 2; ha páratlan: 3 illetve ω(Cn) = ha n>3 akkor 2; n=3-ra 3

Minden G gráfra teljesül, hogy a kromatikus szám alsó becslése a maximális klikkméret: $\omega(G)\leq\chi(G)$.
Minden G gráfra áll, hogy a kromatikus szám felső becslése a maximális fokszám+1: $\chi(G)\leq\Delta(G)+1$.
Ezen két állításból: $\omega(G)\leq\chi(G)\leq\Delta(G)+1$.

Brooks tétele: G véges, egyszerű, összefüggő. Ha G nem teljes, és nem páratlan kör, akkor $\chi(G)\leq\Delta(G)$.
G gráf páros, ha 2-színezhető. Másképpen: χ(G) legalább 2, tehát G csúcsai két halmazra-színosztályra bonthatók fel úgy, hogy minden él a két halmaz között fut, de egy halmaz két pontja között sosem fut él.
Cn gráf páros, ha 2-színezhető. Következmény: Ha G páros, akkor G-ben nincsen páratlan kör.
G gráf páros IFF G-ben nincsen páratlan kör. Következmény: **minden fa páros** gráf.

Folyamok, hálózatok

Egy G irányított gráf, s és t G-beli pontok-terminálok (forrás/termelő és nyelő/fogyasztó), illetve c(e) nem negatív élkapacitás **(G,s,t,c) hálózatot** határoznak meg. Hálózat például ha s-ből t-be csöveken keresztül olajat szállítunk.
Folyam: olyan f függvény (G,s,t,c) hálózatban, ami G minden éléhez egy számot rendel, úgy hogy:

1. a folyam minden élen legfeljebb kapacitásnyi lehet (kapacitás feltétel)
2. minden s-től és t-től különböző pontra igaz, hogy a befolyó folyam összmennyisége azonos a kifolyóéval (Kirchhoff-szabály). Eszerint folyam nem keletkezik semmiből és nem is vész el.

Folyamnagyság: az f folyam m_f nagysága az a nettó folyammennyiség, ami s-ből kifolyik.
st-vágás: X a G csúcsainak s-t tartalmazó, de t-től diszjunkt részhalmaza. Az X és V(G)\X között futó éleinek egy halmazát a hálózat egy st-vágásának nevezzük. Az X által meghatározott st-vágás kapacitása az X-ből V(G)\X-be futó élek kapacitásösszege.

Ford-Fulkerson tétel: Ha (G,s,t,c) egy véges hálózat, akkor létezik egy f folyam, és egy $s\in X\subseteq V(G)\setminus\{t\}$ részhalmaz úgy, hogy az m_f folyamnagyság azonos az X által definiált st-vágás kapacitásával. A tétel másik neve a Maximum Flow – Minimum Cut tétel, röviden MFMC. Ekkor tehát a maximális folyamnagyság (maxflow) megegyezik a minimális vágás (mincut) nagyságával.
A **Ford-Fulkerson / javító-utas algoritmus** alkalmas a maximális folyam – minimális vágás megkeresésére: *Gf segédgráfot hozunk létre, irányítsuk úgy G éleit, hogy ahol még növelhető a folyamnagyság, ott előreél, ahol pedig a folyam csökkenthető, ott visszaélek szerepelnek. A Gf segédgráfon definiáljuk a c(u,v)=c(u,v)-f(u,v) ha uv előreél, c(u,v)=f(v,u) ha uv visszaél, kapacitásokat. Az algoritmus addig fut, amíg van s-t út. Ha talál ilyen utat, akkor az út előre élein növeljük a folyamot, az út visszaéleinek megfordítottjain pedig csökkentjük. Ez alapján látszik,*

hogy ha nincs már s-t út, akkor maximális folyamot találtunk. Megkeressük azokat a pontokat, amik s-ből elérhetőek, ők alkotják az X halmazt. Ehhez a halmazhoz tartozó vágás minimális vágás lesz.

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: ha a hálózatban minden kapacitás egész szám, akkor létezik olyan maximális folyam, ami a gráf minden élén egész értéket vesz fel. Az ilyen folyamot egész folyamnak nevezzük.
Edmonds-Karp tétel: ha a hálózatban a maximális folyamot javító utas algoritmussal keressük, és mindig egy legkevesebb élből álló út mentén növelünk, akkor a folyamat lépésszáma felülről becsülhető n^3-al.
A többtermelős-többfogyasztós hálózatokat vissza kell vezetni az ismert egytermelős-egyfogyasztós hálózatra végtelenhez hasonló terminálokkal.

Gráfparaméterek

Páros gráfok: G csúcsai két diszjunkt halmazra bonthatók, úgy hogy minden él a halmazok között fut.
Ekvivalens definíció: G akkor páros, ha $\chi(G)\leq 2$, azaz G két színnel színezhető.
Páros hosszú kör páros; páratlan hosszú kör páratlan; páros gráf részgráfja csak páros lehet; páros gráf nem tartalmazhat páratlan kört.
G **véges gráf pontosan akkor páros**, ha nem tartalmaz páratlan kört. Mivel fában nincs kör, így páros.
A G=(V,E) gráf éleinek M részhalmaza független, más szóval M (részleges) **párosítás**, ha az M-beli élek végpontjai különbözőek. M **teljes párosítás**, ha G minden csúcsát fedi.
A G=(V,E) gráf $X\subseteq$V ponthalmaz **szomszédjainak számát** N(X) jelöli.
Adott G gráf esetén $\boldsymbol{\nu(G)}$ jelöli a **maximális független élhalmaz** méretét, azaz G maximális párosításának elemszámát.
A maximális független élhalmaz felülről becsülhető a gráf pontjainak számának felével.
Adott G pontjainak U halmaza **lefogó ponthalmaz**, ha G minden élének van U-beli végpontja. Minimális lefogó ponthalmaz: $\boldsymbol{\tau(G)}$.
Ha G véges gráf, akkor $\nu(G)\leq\tau(G)$.
König tétele: ha G=(A,B,E) véges, páros gráf akkor $\nu(G)=\tau(G)$.

Hall tétele: a G=(A,B,E) véges, páros gráfnak pontosan akkor létezik A-t fedő párosítása, ha $|X|\leq|N(X)|$ minden $X\subseteq A$-ra.
Frobenius tétele: a G=(A,B,E) véges, páros gráfnak pontosan akkor létezik teljes párosítása, ha |A|=|B|, és $|X|\leq|N(X)|$ minden $X\subseteq A$-ra.
Alternáló utas algoritmus maximális párosítás keresésére: kiindulunk az üres párosításból, és azt javítgatjuk. Ha már találtunk M párosítást, akkor tekintjük az ahhoz tartozó segédgráfot, azaz M éleit B-ből A-ba irányítjuk, G egyéb éleit fordítva. Ha ebben a segédgráfban létezik út egy fedetlen A-ból, eddig fedetlen B-be, akkor az ú.n. alternáló úton az eddigi párosítás éleket elhagyva, és az út párosításon kívüli éleit bevéve egy eggyel nagyobb méretű párosítást kapunk. Ha nincs ilyen út, akkor M maximális párosítás.

Egy G gráf pontjainak U részhalmaza **független ponthalmaz**, ha U nem feszít élt. A maximális független ponthalmaz elemszáma $\boldsymbol{\alpha(G)}$.
G gráf éleinek F részhalmaza **lefogó élhalmaz**, ha G minden pontjából indul F-beli él. Minimális lefogó élhalmaz elemszáma $\boldsymbol{\rho(G)}$.
Gallai tételei:

1. ha G-ben nincs hurokél, akkor $\tau(G)+\alpha(G)=n$
2. ha G-nek nincs izolált pontja: $\nu(G)+\rho(G)=n$

König tétele: ha G véges, páros gráfnak nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G)=\rho(G)$.
Ha G véges gráf és nincsen izolált pontja, akkor $\alpha(G)\leq\rho(G)$.

$\alpha(G)\leq\rho(G)$	max. függtn.	min. lef.	(K) páros gráfra $\nu(G)=\tau(G)$
pontok	α	τ	(G1) ha G-ben nincs hurokél, akkor $\tau(G)+\alpha(G)=n$
élek	ν	ρ	(G2) ha G-nek nincs izolált pontja: $\nu(G)+\rho(G)=n$
$\nu(G)\leq\tau(G)\leq 2\nu(G)$			(K) páros összefüggő gráfra $\alpha(G)=\rho(G)$

Síkbarajzolhatóság, dualitás

G=(V,E) gráf **síkbarajzolható**, ha van G-nek olyan diagramja, amin élek csak végpontban metszik egymást. G síkbarajzolható, ha létezik síkbarajzolása. G akkor síkbarajzolható, ha gömbrerajzolható.
Egy síkbarajzolható (röviden sr) gráf által meghatározott síktartomány (röviden tartomány) a lap. Külső tartománynak nevezzük a nem korlátos – végtelen tartományt.
Síkbarajzolt G gráf esetén n jelöli G csúcsainak, e az éleinek, t pedig a lapjainak számát.
Bármely komplex poliéder gráfot határoz meg. Minden poliéder élgráfja (váza – élhálója) síkbarajzolható.
Ha egy sr gráf komponenseinek száma k, akkor **n+t=e+k+1**.
Az **Euler-féle poliéderformula** alapján: ha G sr és öf, akkor n+t=e+2.
Ennek következményei:

1. ha G sr, akkor a lapok száma nem függ az adott síkbarajzolástól
2. ha G egyszerű és legalább n>2 csúcsa van, akkor az e élszám felső becslése 3n-6
3. ha G egyszerű és sr, akkor a maximális fokszám legfeljebb 5
4. K_5 sem $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható

G és H gráfok **topologikusan izomorfak**, ha H meghapható soros bővítéssel (élfelosztással) vagy annak fordítottjával ezeket tetszőlegesen sokszor alkalmazva. A topoligikus izomorifa nem változtat a síkbarajzolhatóságon.
Ha G-nek van olyan részgráfja, amely K3,3 vagy K5 soros bővítése, akkor G nem sr.
Kuratowski tétele: G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz K_5-el, vagy $K_{3,3}$-al topologikusan izomorf részgráfot.

G*=(V*,E*) G gráf **duálisa**, ha V* G tartományainak felel meg, $E_*=\{e_*:e\in E\}$, ahol e* az e-t határoló tartományokat összekötő él. G* függ G adott síkbarajzolásától is.
$Q\subseteq E(G)$ élhalmaz **vágás**, ha Q-t elhagyva G több komponensre esik szét, és Q egy legszűkebb ilyen halmaz, azaz Q semelyik valódi részhalmazára ez nem teljesül. Az e él **elvágó él**, ha $\{e\}$ vágás. G gráf e és e' élei **soros élek**, ha $\{e,e'\}$ vágás.
Legyen G=(V,E) síkbarajzolható. Ekkor:

1. ha G* a G duálisa, akkor G* síkbarajzolható, és összefüggő
2. f(e):=e egy f: E(G)->E*(G) természetes bijekciót definiál.
3. ha e a G hurokéle (elvágó éle) ↔ f(e) a G* elvágó éle (hurokéle)
4. e,e' G soros (párhuzamos) élei ↔ f(e),f(e') a G* párhuzamos (soros) élei
5. ha G összefüggő, akkor G=(G*)*, és ekkor G pontja bijektíven G* lapjainak felelnek meg
6. C a G köre (vágása) ↔ f(C) a G* vágása (köre).

Ha G egyszerű és sr, akkor 4-színezhető.
Minden egyszerű sr gráf 5-színezhető. (triv.)

Számelmélet (oszthatóság, kongruenciák)

Az a és b számokról azt mondjuk, hogy a osztja b-t, vagy b az a többszöröse (a|b), ha b=aq valamely q egész számra.
Triviális osztó: $n\neq 0$, esetén $\pm 1,\pm n|$n az n triviális osztói.
Valódi osztó: az n nemtriviális osztói.
Felbonthatatlan szám: $p\in Z$ szám felbonthatatlan, ha csak triviális osztói vannak, és $|p|\neq 1$. Pl.: 2, 11
Bármely z szám előáll felbonthatatlan számok szorzataként, ha |z|>1.
A számelmélet alaptétele: ha egy z egész számra |z|>1, akkor z előáll felbonthatatlan egész számok szorzataként, és az ilyen előállítások csak a tényezők sorrendjében és előjeleiben különböznek.

Pl.: $-24=2*3*(-2)*2=(-3)*(-2)*(-2)*2$

Kanonikus alak

Prím: egy $p\in Z$ szám akkor prím, ha |p|>1, és csak úgy tud osztani egy szorzatot, ha a szorzat valamelyik tényezőjét osztja – p|ab akkor p|a, vagy p|b. Számelmélet alaptételének következménye: a prím és a felbonthatatlan ugyanazokat számokat jelöli.

Egy d szám pontosan akkor osztója az $n\in N$ számnak, ha d kanonikus alakjában pontosan ugyan azok a számok szerepelnek, mint n kanonikus alakjában, és minden ilyen prím kitevője d-ben legfeljebb akkora, mint n-ben.

Az n pozitív osztóinak száma $d(n)=\Pi(\alpha_i+1)$.

Legnagyobb közös osztó: (a,b) = közös prímek szorzata a legkisebb hatványon.

Legkisebb közös többszörös: [a,b] = összes prím szorzata az előforduló legnagyobb hatványon.

Relatív prím: a és b relatív prímek, ha (a,b)=1.

Euklideszi algoritmus: Input: a és b egészek (mondjuk $b\leq a$) Output: (a,b) Működés: Legyen $a_0:=a$, $a_1:=b$. Ha már meghatároztuk $a_0\geq a_1\geq\cdots\geq a_i$ számokat, akkor legyen $a_{i-1}=q_ia_i+a_{i+1}$, azaz osszuk el maradékosan a_{i-1}-t a_i-vel, és legyen a_{i+1} a maradék. Az eljárás addig megy, amíg $a_{i+1}\neq 0$, ekkor(a,b)= a_k.

Végtelen sok prímszám van.

Tetszőlegesen hosszú sorozat képezhető szomszédos összetett számokból, azaz bármely $n\in\mathbb{N}$-re létezik olyan N, amire az N+1, N+2,…,N+n számok mindegyike összetett. Másképpen: a prímszámok között tetszőlegesen nagy hézag lehet.

Csebisev-tétel: Tetszőleges n pozitív egészre létezik p prím, $n<p\leq 2n$.

Nagy prímszámtétel: $\lim \pi(x)/(x/\ln x)=1$,ahol $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb prímek számát jelöli.

Az a, b, m $\in\mathbb{Z}$, 0<m esetén azt mondjuk, hogy a kongruens b modulo m, ha m|a-b Jelölése: $a\equiv b\ (mod\ m)\rightarrow a\equiv b(m)$.

Két kongruencia **összeadható**, és **összeszorozható**: $a\equiv b(m)$ és $c\equiv d(m)$, akkor $a+c\equiv b+d(m)$, és $ac\equiv bd(m)$. Kongruencia osztásakor a modulust is osztjuk, az osztó és a modulus legnagyobb közös osztójával.

Következmények:

1. $a\equiv b(m)$ pontosan akkor teljesül, ha $a+k\equiv b+k(m)$
2. ha d relatív prím az m-hez, akkor $a\equiv b(m)$ kongruencia ekvivalens az $ad\equiv bd(m)$ kongruenciával, tehát kongruencia szorzása csak akkor ekvivalens átalakítás, ha a modulushoz relatív prím számmal szorzunk
3. ha d>0 rögzített egész, akkor $a\equiv b(m)$ ekvivalens $ad\equiv bd(md)$.

Ha $a\equiv b(m)$, akkor (a,m)=(b,m).

TMR: rögzített m>1 esetén az m elemű, $T=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ halmazt modulo m teljes maradékrendszerének nevezzük, ha minden m szerinti maradékosztályból pontosan egy elemet tartalmaz.

Lineáris kongruencia: $ax\equiv b(m)$, ahol a és b adott egészek, m pedig adott pozitív egész.

Tétel: $ax\equiv b(m)$ lineáris kongruencia pontosan akkor oldható meg, ha (a,m)|b. A kongruencia megoldáshalmaza (a,m) darab modulo m maradékosztály.

Lehetséges megoldási módok:

1. Euklideszi algoritmust felhasználva
2. az a együttható abszolút értékét csökkentjük egészen 1-ig ekvivalens átalakításokkal. a, a-t, vagy b-t, vele kongruens számmal helyettesítünk b, Ha (a,b)>1, akkor osztunk, szükség esetén a modolust is c, a modulushoz relatív prímmel szorzunk – és a modulushoz nem nyúlunk.
3. megoldható kongruenciarendszerként is ha írunk fel hozzá egy 0-t maradékul adó kongruenciát