2. Zárthelyi megoldásokkal

2001 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Határozza meg az $f_n(x) = x + e^{-n2}$ függvénysorozatsorozat konvergencia és egyenletes konvergencia tartományát!

MO. Tetsz. $x \in \mathbb{R}$-re $f_n(x) \longrightarrow x$, így tetsz. $x \in \mathbb{R}$-re $|r_n(x)| = e^{-n^2} \leq e^{-n^2} \longrightarrow 0$, azaz egyenletesen konvergens az egész számegyenesen.

2. Létezik-e olyan hatványsor, melynek határfüggvénye minden valós szám esetén az f függvény, ha

a) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$ b) $f(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2$

Azon eset(ek)ben, mely(ek)re a válasz igen, adjon meg két ilyen hatványsort, ha van!

MO. a) Nem: hatványsor határfüggvénye akárhányszor deriválható, f pedig az origóban csak egyszer.

b) Igen: $f(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2 = x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 2 + 2x^2$ egy origó körüli,

$f(1) = 4,\ f'(1) = 4,\ f''(1) = 4 \rightsquigarrow \quad f(x) = 4 + 4(x-1) + 2(x-1)^2$ pedig egy $x = 1$ körüli hatványsor.

3. Számitsa ki az $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ értékét 0.01 pontossággal!

MO. e^x x=0 körüli Taylor-sora alapján :

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \ldots\right) dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+$$

, hiszen az integrálás és a határátmenet felcserélhető, tekintve, hogy a szóbanforgó hatványsor mindenütt konvergens (összegfüggvénye: e^{-x2} minden valós x-re), így bármely korlátos intervallumon egyenletesen is konvergens. Az eredménysor nyilván Leibniz tipusú, így a hiba nem nagyobb, mint az első elhagyott tag abszolút értéke: $|r_n| \leq \dfrac{1}{(2n+1)n!} \leq 10^{-2} \rightsquigarrow \quad (2n+1)n! \geq 100 \rightsquigarrow \quad n \geq 4 \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \quad \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{26}{35} \approx 0.743.$$

4. Melyek igazak, melyek nem?

a) Lineárisan független rendszer generátorrendszer

b) Generátorrendszer lineárisan független

c) Lineárisan független rendszerhez bármely új elemet hozzávéve lineárisan független marad

d) Lineárisan független rendszerhez bármely új elemet hozzávéve megszűnik lineárisan függetlennek lenni

e) Lineárisan független rendszerből bármely elemet elhagyva lineárisan független marad

f) Lineárisan független rendszerből bármely elemet elhagyva megszűnik lineárisan függetlennek lenni
MO. $\mathbb{R}^3$ -ban legyen
$i \doteq (1,0,0), j \doteq (0,1,0)\,, k \doteq (0,0,1), l \doteq (1,1,1)\,, X \doteq \{i,j\}\,, Y \doteq \{i,j,k\}\,, Z \doteq \{i,j,k,l\}$.

a) Nem igaz: *X* lin. fgtlen, de pl. $k \notin \mathcal{L}(X)$. **b)** Nem igaz: *Z* gen. rndsz., $l \in Z$, de $l \in \mathcal{L}(Z \setminus \{l\})$ **c)** Nem igaz: *Y* lin. fgtlen, de $Z = Y \cup \{l\}$, már nem az (lásd b)) **d)** Nem igaz: *X* lin.fgtlen és $Y = X \cup \{k\}$ is az **e)** Igaz **f)** Nem igaz: lásd e).

5. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$. Deriválható-e *f* az origóban?

MO. Nem: 1) A parciálisok az origóban: $f(x,0) = x$ minden x-re
$\rightsquigarrow \quad f_x(0,0) = f'(x,0) = 1\,, f(0,y) = y$ minden y-ra $\rightsquigarrow \quad f_y(0,0) = f'(0,y) = 1\,.$

2) $g(h,k) \doteq \dfrac{f(0+h,0+k) - 0 - (1,1)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2} - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = -\dfrac{h^2\,k + k^2\,h}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$ és g-nek nincs

határértéke az origóban:
$g(h,0) = 0 \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0\,,\ g(h,h) = -\dfrac{2\,h^3}{(2\,h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{8}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \dfrac{2}{\sqrt{8}}$

6. Határozza meg az $f(x,y) = x^4 + y^2 - 32\,x$ függvény lokális szélsőértékhelyeit !

MO. grad $f(x,y) = (4x^3 - 32, 2y) = 0 \;\leadsto\; x = 2, y = 0$. A második parciálisok mártixa:

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ennek determinánsa $P = (2,0)$-ban $96 > 0$, így itt van szélsoértéke, és ez minimum, mert itt $f_{xx} = 48 > 0$.