Elektromágneses terek alapjai (VIHVAC03) B csoport **2017. november 21.**

Név nagybetűvel:	Nagypéldák: /10 /10
Neptun-kód:	Kispéldák: /10
Hallgató aláírása:	$\sum$: /30
	IMSc pont: /10

Az egyes feladatcsoportokat külön lapon, áttekinthetően dolgozza ki; a végeredményeket húzza alá. Minden esetben éljen a megengedhető „mérnöki” közelítésekkel.

I. példa. A föld síkja felett $h = 6\,\mathrm{cm}$ magasságban (a levegőben) két hosszú, párhuzamos, $r_0 = 10\,\mathrm{mm}$ sugarú hengeres vezeték helyezkedik el egymástól $d = 2h$ távolságra (lásd az ábrán). A földet vezetőnek tekintjük, potenciálját 0-nak választjuk.

a) Számítsa ki a vezetékek ϕ_1 és ϕ_2 potenciálját, ha azok hosszegységre eső töltése: $q_1 = 80\,\mathrm{pC/m}$ és $q_2 = q_1$. (*3 pont*)

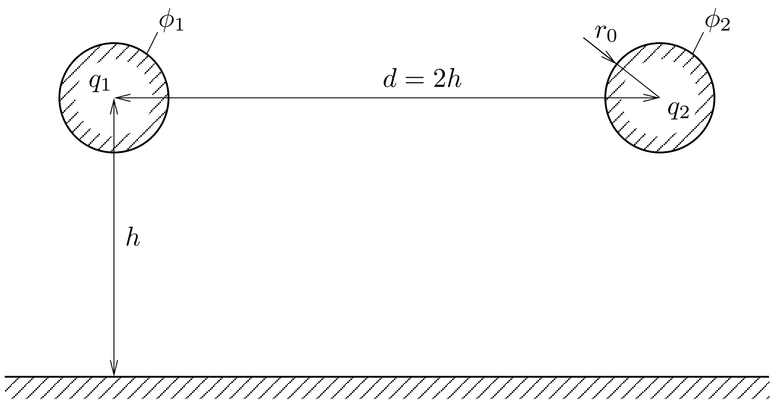
b) Határozza meg a vezetékpár-föld elektródarendszer hosszegységre vonatkoztatott C'_{10} részkapacitását, az un. földkapacitást. Megjegyzés: az a) részfeladat eredménye felhasználható. (*1 pont*)

c) Számítsa ki a vezetékek ϕ_1 és ϕ_2 potenciálját, ha azok hosszegységre eső töltése: $q_1 = 150\,\mathrm{pC/m}$ és $q_2 = -q_1$. (*3 pont*)

d) Határozza meg a vezetékpár-föld elektródarendszer hosszegységre vonatkoztatott C'_{12} részkapacitását, az un. főkapacitást. Megjegyzés: a b) és c) részfeladatok eredménye felhasználható. (*1 pont*)

e) Az 1. vezetéket földeljük, a 2. számút pedig $\phi_2 = 5\,\mathrm{V}$ potenciálra hozzuk. Mekkora töltés van a 2. vezeték $l = 50\,\mathrm{cm}$ hosszúságú szakaszán? (*2 pont*)

f) (*nem kötelező* **IMSc** *feladat*) Számítsa ki a vezetékpár C' hosszegységre eső kapacitását, ha a földet vezető anyag helyett $\varepsilon_r = 3{,}2$ dielektromos állandójú szigetelő közegként modellezzük. (*6 IMSc pont*)



II. példa. Az ábra szerint közös síkban két vékony, kör alakú, koncentrikus vezető hurok helyezkedik el a levegőben; sugaraik $r_1 = 25\,\mathrm{cm}$ és $r_2 = 1\,\mathrm{cm}$. (Figyelem, az ábra nem méretarányos!)

a) Mekkora a mágneses térerősség a hurkok közös középpontjában („O” pont), ha a hurkok árama $I_1 = 50\,\mathrm{mA}$ és $I_2 = 0\,\mathrm{mA}$? (*3 pont*)

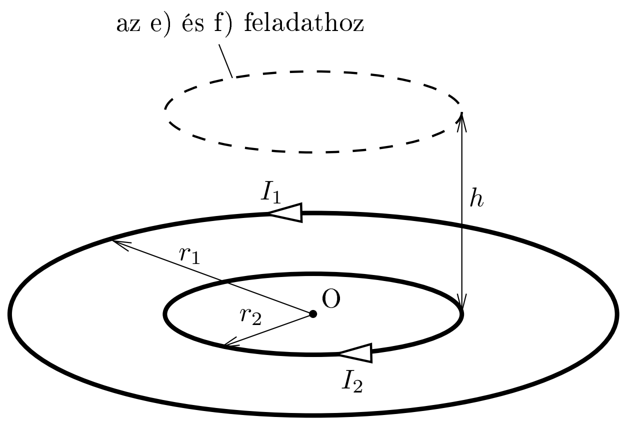
b) Határozza meg a két hurok L_{21} kölcsönös indukciós együtthatóját. (Megjegyzések: Itt felhasználható az a) feladatrész eredménye. A nagyobbik hurok mágneses tere közelítőleg homogénnek vehető a kisebbik hurok belsejében.) (*2 pont*)

c) Számítsa ki az 1. hurok ψ_1 mágneses fluxusát, ha $I_1 = 0\,\mathrm{A}$ és $I_2 = -2{,}0\,\mathrm{A}$. (*1 pont*)

d) Adja meg a 2. hurokban folyó áram amplitúdóját, ha az 1. hurok áramának időfüggvénye $i_1(t) = 2{,}5\,\mathrm{A} \cdot \cos\left(314\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdot t\right)$. A 2. hurok zárt, ellenállása az adott frekvencián $R_2 = 5{,}6\,\mathrm{m\Omega}$, önindukciós együtthatója pedig $L_2 = 50{,}5\,\mathrm{pH}$. (*3 pont*)

e) Ön szerint nő, csökken vagy változatlan marad a hurokpár L_{21} paraméterének abszolút értéke, ha a 2. hurkot a tengelye mentén mozgatva $h = r_1$ magasságba emeljük? (Az ábrán szaggatott vonallal jelölve.) Válaszát nem kell indokolnia. (*1 pont*)

f) (*nem kötelező* **IMSc** *feladat*) Határozza meg az L_{21} kölcsönös indukciós együtthatót az e) pontban leírt elrendezésre. (*4 IMSc pont*)



Kispéldák *Kérjük, külön lapon dolgozza ki. Az eredményeket paraméteres alakban kell megadni, és nem kell rávezetni a feladatlapra.*

1. Dielektrikum adott pontjában az elektromos térerősség abszolút értéke E, az eltolásvektor abszolút értéke D. Fejezze ki a dielektromos polarizáció vektorának abszolút értékét. (*2 pont*)

2. Két elektróda közötti térrészt homogén, nem ideális szigetelőanyag tölt ki, amelynek permittivitása ε, fajlagos vezetőképessége σ. Az elektródapár kapacitása C. Adja meg két elektróda között mérhető szivárgási ellenállást. (*2 pont*)

3. Egy R sugarú hengeres vezetőben I áram folyik homogén eloszlásban. Adja meg a mágneses indukció nagyságát a vezeték tengelyétől $R/3$ távolságban. (*2 pont*)

4. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben $\phi(x, y, z) = \phi(y) = 3\sin(2\pi y)$. Fejezze ki az elektromos térerősség vektorát mint a hely függvényét. (*2 pont*)

5. Szabad térben Q töltésű tömegpont halad $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$ sebességgel; utóbbi a derékszögű koordináta-rendszerbeli felbontást jelenti. A homogén mágneses mező indukció vektora ugyanitt $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$. Adja meg az elektromos térerősség vektorát, ha a tömegpontra ható erők eredője zérus. (*2 pont*)

Elemi töltés- és árameloszlások keltette mezők vákuumban:

- Ponttöltés: $\phi(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}, \quad E_r(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$

- Végtelen egyenes vonaltöltés: $\phi(r) = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_{\mathrm{ref}}}{r}, \quad E_r(r) = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

- Végtelen egyenes vonaláram: $B_\varphi(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{1}{r}$

A Biot-Savart-törvény: $H(\mathbf{r}) = \dfrac{I}{4\pi}\oint\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{l}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$

Fizikai állandók: $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}, \qquad \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\dfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

Elektromágneses terek alapjai (VIHVAC03) B csoport **2017. november 21.**

I. példa. A föld síkja felett $h = 6\,\mathrm{cm}$ magasságban (a levegőben) két hosszú, párhuzamos, $r_0 = 10\,\mathrm{mm}$ sugarú hengeres vezeték helyezkedik el egymástól $d = 2h$ távolságra (lásd az ábrán). A földet vezetőnek tekintjük, potenciálját 0-nak választjuk.

a) Számítsa ki a vezetékek ϕ_1 és ϕ_2 potenciálját, ha azok hosszegységre eső töltése: $q_1 = 80\,\mathrm{pC/m}$ és $q_2 = q_1$. (*3 pont*)

Megoldás tükrözéssel és kis sugarú közelítéssel (1 p)

$$\phi_1 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{h}{r_0} - \ln\frac{h}{2h} + \ln\frac{h}{2h} - \ln\frac{h}{2\sqrt{2}h}\right) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2\sqrt{2}h}{r_0} = 4{,}07\,\mathrm{V} \quad (1\ \mathrm{p})$$

Szimmetria miatt $\phi_2 = \phi_1$ (1 p)

b) Határozza meg a vezetékpár-föld elektródarendszer hosszegységre vonatkoztatott C'_{10} részkapacitását, az un. földkapacitást. Megjegyzés: az a) részfeladat eredménye felhasználható. (*1 pont*)

$$q_1 = C'_{10}\phi_1 + C'_{12}(\phi_1 - \phi_2) \quad\rightarrow\quad q_1^{(a)} = C'_{10}\phi_1^{(a)} \quad\rightarrow\quad C'_{10} = \frac{q_1^{(a)}}{\phi_1^{(a)}} = 19{,}6\,\mathrm{pF/m} \quad (1\ \mathrm{p})$$

c) Számítsa ki a vezetékek ϕ_1 és ϕ_2 potenciálját, ha azok hosszegységre eső töltése: $q_1 = 150\,\mathrm{pC/m}$ és $q_2 = -q_1$. (*3 pont*)

Megoldás tükrözéssel és kis sugarú közelítéssel (1 p)

$$\phi_1 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{h}{r_0} - \ln\frac{h}{2h} - \ln\frac{h}{2h} + \ln\frac{h}{2\sqrt{2}h}\right) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{2}h}{r_0} = 5{,}77\,\mathrm{V} \quad (1\ \mathrm{p})$$

Szimmetria miatt $\phi_2 = -\phi_1$ (1 p)

d) Határozza meg a vezetékpár-föld elektródarendszer hosszegységre vonatkoztatott C'_{12} részkapacitását, az un. főkapacitást. Megjegyzés: a b) és c) részfeladatok eredménye felhasználható. (*1 pont*)

$$q_1^{(c)} = C'_{10}\phi_1^{(c)} + C'_{12}2\phi_1^{(c)} \quad\rightarrow\quad C'_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1^{(c)}}{\phi_1^{(c)}} - C'_{10}\right) = 3{,}2\,\mathrm{pF/m} \quad (1\ \mathrm{p})$$

e) Az 1. vezetéket földeljük, a 2. számút pedig $\phi_2 = 5\,\mathrm{V}$ potenciálra hozzuk. Mekkora töltés van a 2. vezeték $l = 50\,\mathrm{cm}$ hosszúságú szakaszán? (*2 pont*)

$q_2 = C'_{20}\phi_2 + C'_{12}(\phi_2 - 0)$, és a szimmetria miatt $C'_{20} = C'_{10}$ (1 p)
$Q = l(C'_{10} + C'_{12})\phi_2 = 57{,}1\,\mathrm{pC}$ (1 p)

f) (*nem kötelező* **IMSc** *feladat*) Számítsa ki a vezetékpár C' hosszegységre eső kapacitását, ha a földet vezető anyag helyett $\varepsilon_r = 3{,}2$ dielektromos állandójú szigetelő közegként modellezzük. (*6 IMSc pont*)

A példatár 2.28 példája alapján a tükörtöltések szorzója $\alpha = \dfrac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} = -0{,}52$ (2 p)

Innen $\phi_1 = \dfrac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\dfrac{h}{r_0} + \alpha\ln\dfrac{h}{2h} - \ln\dfrac{h}{2h} - \alpha\ln\dfrac{h}{2\sqrt{2}h}\right)$ (2 p)

$C' = \dfrac{q_1}{2\phi_1} = \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h(\sqrt{2})^\alpha}{r_0}} = 12{,}1\,\mathrm{pF/m}$ (2 p)

II. példa. Az ábra szerint közös síkban két vékony, kör alakú, koncentrikus vezető hurok helyezkedik el a levegőben; sugaraik $r_1 = 25\,\mathrm{cm}$ és $r_2 = 1\,\mathrm{cm}$. (Figyelem, az ábra nem méretarányos!)

a) Mekkora a mágneses térerősség a hurkok közös középpontjában („O" pont), ha a hurkok árama $I_1 = 50\,\mathrm{mA}$ és $I_2 = 0\,\mathrm{mA}$? *(3 pont)*

> A Biot-Savart-törvényt az 1. hurokra felírva: $H = \dfrac{I_1}{4\pi}\oint_{(1)}\dfrac{\mathrm{d}l}{r_1^2}$ (2 p)
> amelyből $H = \dfrac{I_1}{4\pi r_1^2}\cdot 2r_1\pi = \dfrac{I_1}{2r_1} = 100\,\mathrm{mA/m}$ (1 p)

b) Határozza meg a két hurok L_{21} kölcsönös indukciós együtthatóját. (Megjegyzések: Itt felhasználható az a) feladatrész eredménye. A nagyobbik hurok mágneses tere közelítőleg homogénnek vehető a kisebbik hurok belsejében.) *(2 pont)*

> A mágneses indukció közelítőleg homogén a 2. hurokban, és rá merőleges, (1 p)
> ezért az irányítást is figyelembe véve $L_{21} = \dfrac{\psi_2}{I_1} \approx \dfrac{-\mu_0 H^{(a)} r_2^2\pi}{I_1^{(a)}} = -0{,}79\,\mathrm{nH}$ (1 p)

c) Számítsa ki az 1. hurok ψ_1 mágneses fluxusát, ha $I_1 = 0\,\mathrm{A}$ és $I_2 = -2{,}0\,\mathrm{A}$. *(1 pont)*

> $\psi_1 = L_{12}I_2 = L_{21}I_2 = 1{,}6\,\mathrm{nWb}$ (1 p)

d) Adja meg a 2. hurokban folyó áram amplitúdóját, ha az 1. hurok áramának időfüggvénye $i_1(t) = 2{,}5\,\mathrm{A}\cdot\cos\left(314\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\cdot t\right)$. A 2. hurok zárt, ellenállása az adott frekvencián $R_2 = 5{,}6\,\mathrm{m\Omega}$, önindukciós együtthatója pedig $L_2 = 50{,}5\,\mathrm{pH}$. *(3 pont)*

> A 2. hurokra felírható feszültségtörvény: $j\omega L_{21}I_1 = (R_2 + j\omega L_2)I_2$ (2 p)
> innen $|I_2| = \dfrac{\omega|L_{21}|}{\sqrt{R_2^2+\omega^2L_2^2}}|I_1| \approx \dfrac{\omega|L_{21}|}{R_2}|I_1| = 0{,}11\,\mathrm{mA}$ (1 p)

e) Ön szerint nő, csökken vagy változatlan marad a hurokpár L_{21} paraméterének abszolút értéke, ha a 2. hurkot a tengelye mentén mozgatva $h = r_1$ magasságba emeljük? (Az ábrán szaggatott vonallal jelölve.) Válaszát nem kell indokolnia. *(1 pont)*

> Nyilvánvalóan csökken. (1 p)

f) (*nem kötelező* **IMSc** *feladat*) Határozza meg az L_{21} kölcsönös indukciós együtthatót az e) pontban leírt elrendezésre. *(4 IMSc pont)*

> A példatár 4.4 feladata alapján $H = \dfrac{I_1}{4\sqrt{2}r_1}$ (2 p)
> amellyel $L_{21} \approx \dfrac{-\mu_0 H r_2^2\pi}{I_1} = -\dfrac{\mu_0 r_2^2\pi}{4\sqrt{2}r_1} = -0{,}28\,\mathrm{nH}$ (2 p)

Kispéldák *Kérjük, külön lapon dolgozza ki. Az eredményeket paraméteres alakban kell megadni, és nem kell rávezetni a feladatlapra.*

1. Dielektrikum adott pontjában az elektromos térerősség abszolút értéke E, az eltolásvektor abszolút értéke D. Fejezze ki a dielektromos polarizáció vektorának abszolút értékét. *(2 pont)*

> Nem lehetséges: kevés az adat. (2 p)

2. Két elektróda közötti térrészt homogén, nem ideális szigetelőanyag tölt ki, amelynek permittivitása ε, fajlagos vezetőképessége σ. Az elektródapár kapacitása C. Adja meg két elektróda között mérhető szivárgási ellenállást. *(2 pont)*

> $G = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}C \quad\rightarrow\quad R = \dfrac{\varepsilon}{\sigma C}$ (2 p)

3. Egy R sugarú hengeres vezetőben I áram folyik homogén eloszlásban. Adja meg a mágneses indukció nagyságát a vezeték tengelyétől $R/3$ távolságban. *(2 pont)*

> A gerjesztési törvény: $2\cdot\dfrac{R}{3}\pi H = \dfrac{(R/3)^2\pi}{R^2\pi}I$ (1 p)
> $B = \mu_0 H = \dfrac{\mu_0 I}{6R\pi}$ (1 p)

4. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben $\phi(x,y,z) = \phi(y) = 3\sin(2\pi y)$. Fejezze ki az elektromos térerősség vektorát mint a hely függvényét. *(2 pont)*

> $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$ (1 p)
> $\mathbf{E}(x,y,z) = -\hat{\mathbf{e}}_y\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\hat{\mathbf{e}}_y 6\pi\cos(2\pi y)$ (1 p)

5. Szabad térben Q töltésű tömegpont halad $\mathbf{v} = (0,0,v_z)$ sebességgel; utóbbi a derékszögű koordináta-rendszerbeli felbontást jelenti. A homogén mágneses mező indukció vektora ugyanitt $\mathbf{B} = (0,B_y,0)$. Adja meg az elektromos térerősség vektorát, ha a tömegpontra ható erők eredője zérus. *(2 pont)*

> $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \mathbf{0}$ (1 p)
> $\mathbf{E} = (v_zB_y, 0, 0)$ (1 p)