Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2011. november 24.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A^{-1}-et Gauss-eliminációval számolva:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(7 pont)}$$

Így A^{-1} létezik és nem más, mint a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (3 pont)
Minden számolási hiba 1 pont levonást jelentsen. Amennyiben a megoldó visszaszorzással ellenőrizve észreveszi, hogy számolási hibát vétett (de azt nem találja meg), a számolási hibákért járó pontlevonás 1-gyel csökkenthető, ha az összpontszám így sem éri el a 10-et. Ha valaki csak annyit állapít meg, hogy $\det A = 1 \neq 0$, ezért az inverz létezik, de nem számolja ki, az 2 pontot érjen. (Nem jár pontlevonás azért, ha valaki a fenti számolás után nem tér ki arra, hogy az inverz miért létezik – hiszen ez a módszer helyes működéséből implicite következik.) Ha látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 1-2 pontot érhet.

2. Legyen A tetszőleges mátrix és legyen B az a mátrix, amelyet A-ból nyerünk úgy, hogy annak minden elemét 1-gyel megnöveljük. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(A) + 1$ (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük).

* * * * *

A és B esetében is vonjuk le az első oszlopot az összes többiből; a kapott mátrixokat jelölje A' és B'.(2 pont)
Ekkor B' és A' csak az első oszlopukban különbözhetnek, a többi oszlopuk már azonos. (2 pont)
Továbbá $\mathrm{r}(A') = \mathrm{r}(A)$ és $\mathrm{r}(B') = \mathrm{r}(B)$, mert a Gauss-elimináció (akár oszlopokon, akár sorokon végzett) lépései a rangot nem változtatják meg. (2 pont)
Ha a bizonyítandó állítással szemben $\mathrm{r}(B) \geq \mathrm{r}(A)+2$, vagyis $\mathrm{r}(B') \geq \mathrm{r}(A')+2$ teljesülne, akkor B' oszlopai közül ki lehetne választani $\mathrm{r}(A') + 2$ lineárisan függetlent az oszloprang definíciója szerint. (2 pont)
Azonban ezek közül az elsőt elhagyva (ha az egyáltalán a kiválasztottak között szerepel) azt kapnánk, hogy A' oszlopai közül kiválasztható $\mathrm{r}(A') + 1$ lineárisan független. Ez nyilvánvalóan ellentmond az oszloprang definíciójának, így $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(A) + 1$ valóban igaz. (2 pont)

3. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B = \{(1;1;1),(0;1;1),(0;0;1)\}$ és $C = \{(2;1),(2;-1)\}$. Mit rendel $\mathcal{A}$ a $(3;2;1)$ vektorhoz? (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy B és C valóban bázisok $\mathbb{R}^3$-ben, illetve $\mathbb{R}^2$-ben.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

* * * * *

$(3;2;1) = 3\cdot(1;1;1) + (-1)\cdot(0;1;1) + (-1)\cdot(0;0;1)$, így $[(3;2;1)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (2 pont)

A tanult tétel szerint $[\mathcal{A}((3;2;1))]_C = [\mathcal{A}_{B,C}] \cdot [(3;2;1)]_B$. (2 pont)

Elvégezve a szorzást: $[\mathcal{A}((3;2;1))]_C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 pont)

Ezért $\mathcal{A}((3;2;1)) = 3\cdot(2;1) + 1\cdot(2;-1) = (8;2)$. (3 pont)

4. a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 2$ sajátértéke az alábbi A mátrixnak!
b) Adjuk meg A egy sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) A tanult tétel szerint $\lambda = 2$ pontosan akkor sajátérték, ha $\det(A - 2E) = 0$, vagyis ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(2 pont)}$$

A fenti determináns negyedik sorából a második sor másfélszeresét levonva csupa 0 sort kapunk, így $\det(A - 2E) = 0$ valóban igaz, ezért $\lambda = 2$ sajátérték. (2 pont)

b) Mivel $\lambda = 2$-ről tudjuk, hogy sajátérték, ezért kereshetünk ehhez tartozó $\underline{v}$ sajátvektort. Vagyis olyan $\underline{v}$-t keresünk, amelyre $A \cdot \underline{v} = 2 \cdot \underline{v}$. (1 pont)

Ha $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$, akkor $A \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 2y + 2z + 4u \\ 3x + 7y + 2z \\ 3z + 8u \end{pmatrix}$ és $2 \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2u \end{pmatrix}$, (1 pont)

vagyis az $A \cdot \underline{v} = 2 \cdot \underline{v}$ egyenlet a $3x + 2y = 2x$, $2y + 2z + 4u = 2y$, $3x + 7y + 2z = 2z$, $3z + 8u = 2u$ egyenletrendszerre vezet. (1 pont)

Rendezés után az első és a harmadik egyenletből $x = y = 0$, a másik két egyenletből egyaránt a $z + 2u = 0$ összefüggés következik. (1 pont)

Vagyis sajátvektor minden $u \neq 0$-ra a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2u \\ u \end{pmatrix}$ vektor (például tehát a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$). (2 pont)

Megjegyezzük, hogy a b) feladat megoldásából az a) feladat állítása is következik: valóban, mivel a talált $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektorra $A \cdot \underline{v} = 2 \cdot \underline{v}$ teljesül, ezért $\lambda = 2$ definíció szerint sajátértéke A-nak. Az a) feladatért járó 4 pont természetesen ezzel az indoklással is megszerezhető. (Megjegyezzük még, hogy A-nak három további (irracionális) sajátértéke is van, így ezekhez is tartoznak sajátvektorok. Így a b) feladatnak elvileg további megoldásai is vannak, ezeknek a meghatározása azonban számológép nélkül nagyon körülményes volna.)

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része negatív és a képzetes része pozitív!

$$\frac{z^5}{512} + \frac{7+3\sqrt{3}i}{4-\sqrt{3}i} = 0$$

* * * * *

$\dfrac{7+3\sqrt{3}i}{4-\sqrt{3}i} = \dfrac{(7+3\sqrt{3}i)(4+\sqrt{3}i)}{(4-\sqrt{3}i)(4+\sqrt{3}i)} = \dfrac{19+19\sqrt{3}i}{19} = 1+\sqrt{3}i.$ (2 pont)

Ezt behelyettesítve, 512-vel szorozva és átrendezve: $z^5 = -512 - 512\sqrt{3}i$. (1 pont)

z tehát $\sqrt[5]{-512-512\sqrt{3}i}$ valamelyik értéke lehet csak. (1 pont)

$-512 - 512\sqrt{3}i = 1024\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{10}\left(\cos 240° + i \sin 240°\right)$. (2 pont)

Ebből $\sqrt[5]{-512-512\sqrt{3}i} = 2^2\left(\cos\left(48° + k \cdot 72°\right) + i \sin\left(48° + k \cdot 72°\right)\right)$, $0 \leq k \leq 4$. (1 pont)

Ha a valós rész negatív és a képzetes rész pozitív, akkor a szög 90° és 180° között van. Ez csak a $k = 1$ esetben, a 120°-ra teljesül. (1 pont)

Így az egyetlen megoldás: $z = 4\left(\cos 120° + i \sin 120°\right) = -2 + 2\sqrt{3}i$. (2 pont)

6. Hányféleképp választható ki 15 házaspár tagjai (tehát összesen 30 ember) közül 10 ember úgy, hogy a kiválasztott emberek között pontosan 3 házaspár legyen?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

Először válasszuk ki a 15 házaspár közül azt a hármat, amelyeknek mindkét tagja bekerül a kiválasztandó 10 ember közé. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\binom{15}{3}$ = (1 pont)

$= \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6}$. (1 pont)

A maradék házaspárok tagjai közül most úgy kell választani 4 embert, hogy minden házaspárból legföljebb csak egy tag választható (különben 3-nál több házaspárt tartalmazna a kiválasztott emberek halmaza). Ezért válasszuk ki a maradék 12 házaspár közül azt a 4-et, amelyeknek egy-egy tagját még bevesszük a kiválasztandó emberek közé. A lehetőségek száma most $\binom{12}{4} =$ (3 pont)

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24}$. (1 pont)

Végül az utóbb kiválasztott 4 házaspár mindegyikéről el kell döntenünk, hogy annak a férfi vagy a nő tagját vesszük be a kiválasztandó emberek közé. Mind a 4 esetben kétféle döntésünk van, így a lehetőségek száma (például az ismétléses variációnál tanultak miatt) $2^4 = 16$. (2 pont)

Mivel az először mondott $\binom{15}{3}$ választási lehetőség mindegyike $\binom{12}{4}$ féleképp folytatható a másodiknak mondott választással, majd az így kapott összesen $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{4}$ lehetőség mindegyike 2^4 féleképpen fejezhető be, ezért az összes lehetőségek száma $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{4} \cdot 2^4 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 16}{6 \cdot 24}$. (2 pont)

Bár a feladat szövege szerint az eredmény megadásához csak a négy alapművelet használható, nem jár pontlevonás azért, ha valaki 2^4 értékét nem számítja ki.