ANALÍZIS 1.	**I. PÓTZÁRTHELYI**	**2015. november 2.**
Mérnök informatikus szak	β-variáns	Munkaidő: 50 perc

---

1. feladat (4+8 pont)
Adja meg az alábbi egyenletek megoldásait algebrai alakban:

$$a)\ z^2 - 2iz + 3 = 0, \qquad b)\ b)\ iz^3 = 27.$$

---

a) $z_{1,2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \dfrac{2i + \sqrt{-4-12}}{2} \overset{\mathbf{2p}}{=} (1 \pm 2)i$
b)i-vel átosztva $z^3 \overset{\mathbf{1p}}{=} -27i \overset{\mathbf{1p}}{=} 27\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, vagyis
$z_1 \overset{\mathbf{1p}}{=} 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} 3i$, $z_2 \overset{\mathbf{1p}}{=} 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$,
$z_3 \overset{\mathbf{1p}}{=} 3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

---

2. feladat (7 pont)
A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

$$\frac{5n^2+2}{n^2+5n} \to 5.$$

Legyen $\varepsilon > 0$, olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindexet keresünk, hogy $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $\left|\dfrac{5n^2+2}{n^2+5n} - 5\right| < \varepsilon$ teljesüljön (**2p**). Ehhez elég, ha

$$\left|\frac{5n^2+2}{n^2+5n} - 5\right| = \left|\frac{5n^2+2-5n^2-25n}{n^2+5n}\right| = \frac{25n-2}{n^2+5n} \leq \frac{25n}{n^2} = \frac{25}{n} < \varepsilon, \quad (\mathbf{3p})$$

vagyis $N(\varepsilon) = \left[\frac{25}{\varepsilon}\right] + 1$ jó lesz (sőt, $N(\varepsilon) = \frac{25}{\varepsilon}$ is, ha nem követeljük meg, hogy a küszöbindex egész legyen) (**2p**).

---

3. feladat (5+5 pont)
Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt{n^3 - 2n^2 - 3} - \sqrt{n^3 + n^2 - 2n}, \qquad b_n = \sin(n^3 - n)\frac{2^{3n+1} + 7^n}{n^8 + 3^{2n-1}}.$$

$$a_n = \sqrt{n^3-2n^2-3} - \sqrt{n^3+n^2-2n} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{n^3-2n^2-3-(n^3+n^2-2n)}{\sqrt{n^3-2n^2-3}+\sqrt{n^3+n^2-2n}} \overset{\mathbf{1p}}{=}$$

$$= \frac{-3n^2+2n-3}{\sqrt{n^3-2n^2-3}+\sqrt{n^3+n^2-2n}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{n^2}{\sqrt{n^3}} \frac{-3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{3}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}}$$

vagyis $a_n \to -\infty$ (**2p**)

$$\frac{2^{3n+1}+7^n}{n^8+3^{2n-1}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{8^n}{9^n} \cdot \frac{2+\left(\frac{7}{8}\right)^n}{\frac{n^8}{9^n}+\frac{1}{3}} \overset{\mathbf{1p}}{\to} 0,$$

és $\sin(n^3-n)$ korlátos (**1p**), vagyis $b_n \to 0$ (**1p**).

---

4. feladat (11 pont)

Legyen $a_1 = 6$, és $a_{n+1} = \dfrac{35}{12-a_n}$

a) Igazolja, hogy a $5 \le a_n \le 7$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton.

c) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

Ha a sorozat konvergens, A határtéke kielégíti az $A = \dfrac{35}{12-A}$, vagyis az $A^2-12A+35=0$ egyenletet. Ennek megoldásai $A=5$ és $A=7$. (**2p**)

a) Teljes indukcióval igazoljuk.

  i) $5 \le a_1 = 6 \le 7$. (**1p**)

  ii) $5 \le a_n \le 7 \Longrightarrow 7 \ge 12-a_n \le 5 \Longrightarrow 5 \le \dfrac{35}{12-a_n} = a_{n+1} \le 7$. (**2p**)

b) $a_2 = \frac{35}{12-6} = \frac{35}{6} \le 6 = a_1$. Sejtés: a sorozat monoton fogyó.Teljes indukcióval igazoljuk.

  i) $6 = a_1 \ge a_2 = \dfrac{35}{6}$. (**1p**)

ii) $a_n \geq a_{n+1} \Longrightarrow 12 - a_n \leq 12 - a_{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{12-a_n} \leq \frac{1}{12-a_{n+1}} \Longrightarrow$ $a_{n+1} = \frac{35}{12-a_n} \leq \frac{35}{12-a_{n+1}} = a_{n+2}$. (**2p**)

c) Mivel a sorozat monoton fogyó, és alulról korlátos, így konvergens, (**2p**) és határértéke a legnagyobb alsó korlátja, ami csak $A = 5$ lehet. (**1p**)

---

5. feladat (5+5 pont)
Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját.

$$a_n = \sqrt[n]{5^n + (-5)^n + n^3}, \qquad b_n = \sqrt[n]{5^n + (-4)^n + n^3}.$$

Konvergensek-e a sorozatok?

Páros n esetén $5 \leftarrow 5\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{3 \cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{3} \to 5$ (**2p**), páratlan n esetén pedig $a_n = \sqrt[n]{n^3} = (\sqrt[n]{n})^3 \to 1$ (**1p**), vagyis $S = \{1, 5\}$, $\limsup a_n = 5 \neq 1 = \liminf a_n$, vagyis a sorozat divergens(**2p**).

$$5 \leftarrow 5\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \sqrt[n]{5^n - \frac{5^n}{2}} \overset{n\geq 3}{\leq} b_n \leq \sqrt[n]{3} \cdot 5^n = 5\sqrt[n]{3} \to 5, \qquad \textbf{(3p)}$$

vagyis (b_n) konvergens $\lim b_n = 5 = \limsup b_n = \liminf b_n$, és $S = \{5\}$. (**2p**)