1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{y\ln(y)}{x^2 - 4x - 5}$$

Mo. Szeperálható differenciálegynlet, $y \equiv 1$ megoldás **(2p)** . A tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y\ln(y)}{x^2-4x-5} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y\ln(y)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2-4x-5}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p})$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{1}{y\ln(y)}\,\mathrm{d}y = \ln|\ln(y)| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{6p})$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{1}{x^2-4x-5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-5)(x+1)}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p})$$

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-5)}{(x-5)(x+1)}$$

Ebből pedig $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{6}$ adódik **(2p)** .

$$\int \frac{1}{(x-5)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right| + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

Tehát a megoldások:

$$y \equiv 1 \quad \text{és} \quad \ln|\ln(y(x))| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right| + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{3y}{x-1} = e^x(x-1)^4 \quad (x \neq 1), \qquad y(2) = 1$$

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{3y}{x-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,á}(x) = C(x-1)^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \quad (\mathbf{6p})$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)(x-1)^3$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettestve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)(x-1)^3 + 3c(x)(x-1)^2}_{y'(x)} - \underbrace{3c(x)(x-1)^2}_{\frac{3y(x)}{x-1}} = e^x(x-1)^4 \quad (\mathbf{2p})$$

Ebből pedig $c'(x) = e^x(x-1)$. Parciális integrálással

$$\int e^x(x-1)\,\mathrm{d}x = e^x(x-1) - \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x(x-2) + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát a $D = 0$ választásssal $c(x) := e^x(x-2)$, így az inhomogén egyenlet egy partikuáris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)(x-1)^3 = e^x(x-2)(x-1)^3 \quad (\mathbf{1p})$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,á}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} e^x(x-2)(x-1)^3 + C(x-1)^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

Jelölje $\widetilde{y}$ a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(2) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1$ **(1p)** , azaz

$$\tilde{y}(x) = e^x(x-2)(x-1)^3 + (x-1)^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x > 1) \quad (\mathbf{2p})$$

---

3. feladat (22 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y''' + 3y'' + 2y' = 12e^{3x} + 4x$$

Mo. Harmadrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_2 = -2$ **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(4p)}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük az $y(x) = Ae^{3x}+Bx+C$ alak (rezonancia) **(2p)** helyett $y(x) = Ae^{3x} + Bx^2 + Cx$ alakban **(2p)** $(x \in \mathbb{R},\ A, B, C \in \mathbb{R})$. Deriválva háromszor **(3p)** :

$$\begin{aligned}
y(x) &= Ae^{3x} + Bx^2 + Cx && | \cdot 0 \\
y'(x) &= 3Ae^{3x} + 2Bx + C && | \cdot 2 \\
y''(x) &= 9Ae^{3x} + 2B && | \cdot 3 \\
y'''(x) &= 27Ae^{3x} && | \cdot 1
\end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$60Ae^{3x}+4Bx+2C+6B = 12e^{3x}+4x \quad \mathbf{(2p)} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{5},\ B = 1,\ C = -3 \quad \mathbf{(2p)},$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{5}e^{3x} + x^2 - 3x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(1p)}$$

A differenciálegynlet általános megoldása:

$$\begin{aligned}
y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\
&= \frac{1}{5}e^{3x} + x^2 - 3x + C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(2p)}
\end{aligned}$$

---

4. feladat (8+8+8=24 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n+1)} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^3} \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^3} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n^2 \ln(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

Első megoldás.

$$|a_n| \le \frac{1}{n^2} \quad (\text{ha } n \ge 2) \quad \mathbf{(4p)},$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^2}$ numerikus sor konvergens **(1p)** , tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ abszolút konvergens **(2p)** , következésképpen konvergens **(1p)** .

Második megoldás. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ sor alternál **(1p)** , az $\left(\frac{1}{n^2\ln(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat monoton csökkenő **(3p)** (hiszen egy nemnegatív monoton növő sorozat reciproka), és 0-hoz tart **(2p)** , tehát a Leibniz-kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ konvergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^3} \quad (n\in\mathbb{N}).$

$$\sqrt[n]{b_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \underset{(\mathbf{1p})}{\xrightarrow{n\to\infty}} \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} < 1 \quad (\mathbf{1p})$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^3} \cdot \dfrac{n^n}{n!} \quad (n\in\mathbb{N}).$

Első megoldás. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$c_n \geq \frac{n^n}{n!} \quad (\mathbf{3p})$$

és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ **(2p)** , tehát (a speciális rendőrelv alapján) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$ **(1p)** , ezért a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ sor divergens **(2p)** .

Második megoldás. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$c_n \geq \frac{n^n}{n!} \geq 1 \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz **(2p)** , ezért a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ sor divergens **(2p)** .

---

5. feladat (6+10=16 pont)

a) Mikor nevezünk egy numerikus sort abszolút konvergensnek? Mi a kapcsolat egy sor konvergenciája és abszolút konvergenciája között?

b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} (-1)^n \frac{(n+1)!}{(n+3)n^n}$$

numerikus sor?

Mo. *a*) A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor abszolút konvergens, ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ sor konvergens. **(3p)**
Minden abszolút konvergens sor konvergens. **(3p)**

b) *Első megoldás.* Legyen $a_n := (-1)^n \frac{(n+1)!}{(n+3)n^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Vizsgáljuk a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor abszolút konvergenciáját **(3p)** :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+2)!}{(n+4)(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+3)n^n}{(n+1)!} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+4)(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{e} < 1,$$

tehát a hányadoskritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor abszolút konvergens **(1p)** , következésképpen konvergens **(2p)** .

Második megoldás. Legyen $a_n := (-1)^n \frac{(n+1)!}{(n+3)n^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor alternál **(1p)** ,

$$|a_n| = \frac{(n+1)!}{(n+3)n^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+2)!}{(n+4)(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+3)n^n}{(n+1)!} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+4)(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{e} < 1,$$

azaz $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ egy küszöbindextől kezdve monoton csökkenő **(1p)** . Tehát a Leibniz-kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)** .

IMSc feladat (15 IMSc pont) Adjunk példát olyan pozitív tagú konvergens sorra, amelynek konvergenciáját a hányadoskritériummal nem tudjuk eldönteni, a gyökkritériummal viszont igen. Indokoljunk!
(*Segítség*: keressünk olyan $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sort, amelyre teljesülnek a $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ egyenlőtlenségek.)

Mo. Legyen például

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{, ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páros,} \\[2ex] \dfrac{1}{3^n} & \text{, ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páratlan.} \end{cases} \qquad (\mathbf{5p})$$

Ekkor az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat torlódási pontjai: $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$ **(2p)** , tehát

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} < 1 \quad (\mathbf{1p})$$

tehát a gyökkritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(2p)** . Ugyanakkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} := \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{, ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páros,} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{, ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páratlan.} \end{cases} \qquad (\mathbf{3p}),$$

tehát $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ és $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ **(2p)** , tehát a hányadoskritérium nem alkalmazható a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sorra.
