Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

1. ZH javítókulcs (2016. 03. 17.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. A PIKK (Packázási és Ingyenélési Kutatóközpont) dolgozói fő tevékenységük, a packázás és ingyenélés mellett immár zabot is hegyeznek. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az **1**-től **4**-ig számozott gépeken az A, B, C és D-vel jelölt munkatársak hány zabot tudnak kihegyezni egy műszak alatt. Állapítsuk meg, egy teljes műszak legfeljebb hány zabot tud kihegyezni. Adjunk meg egy olyan beosztást, amellyel a műszak optimálisan teljesít, valamint bizonyítsuk be, hogy egyetlen más beosztással sem hegyezhető ki a fentiekben meghatározottnál több zab.

	1	**2**	**3**	**4**
A	8	7	10	6
B	4	2	2	7
C	8	8	13	8
D	4	5	4	9

Maximális súlyú párosítást kell keresnünk abban a páros gráfban, amelynek egyik színosztályában az A, B, C és D, míg a másikban az $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ csúcsok találhatók. (1 pont)
Az órán tanult, Egerváryhoz köthető algoritmussal dolgozunk. A kiindulási súlyozott lefogás az A, B, C és D csúcsokon a megfelelő sormaximum, azaz $10, 7, 13$ és 9, a többi csúcson 0. (2 pont)
Az ábrán láthatók az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig az optimális párosítás elemei. (3 pont)

	1	**2**	**3**	**4**				
A	8	$\boxed{7}$	10	6	10	8	8	7
B	$\boxed{4}$	2	2	7	7	5	4	3
C	8	8	$\boxed{13}$	8	13	11	11	10
D	4	5	4	$\boxed{9}$	9	7	6	5
	0	0	0	0				
	0	0	2	2				
	0	0	2	3				
	1	0	3	4				

Egy 33 súlyú párosítást és egy 33 összsúlyú lefogást kaptunk. Ezek szerint az előbbi maximális súlyú párosítás, így az egy műszak alatt kihegyezhető zabok maximális száma pontosan 33. (3 pont)
Optimális beosztás pedig például az, ha A a **2**-es gépen, B az **1**-es gépen, C a **3**-ason, míg D a **4**-esen dolgozik. (1 pont)

---

2. Az órán tanult Fourier-Motzkin elimináció segítségével állapítsuk meg, hogy van-e valós megoldása az itt látható egyenlőtlenségrendszernek.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_2 + 4x_4 &\geq 6 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 13x_3 &\leq -9 \end{aligned}$$

Sajnos a feladat hibásan lett kitűzve: az x_4 változónak x_3-nak kellett volna lennie. Sebaj, a feladat szerencsére így is értelmes. Lássuk.

Felírjuk a lineáris egyenlőtlenségrendszert mátrixos alakban úgy, hogy az egyenlőtlenségek azonos irányba álljanak, azaz a második egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk. (2 pont)
Végrehajtjuk a Fourier-Motzkin eliminációt, azaz a változókat egymás után elimináljuk úgy, hogy először elérjük, hogy az eliminálandó változó együtthatója 0 vagy ± 1 legyen, majd a 0 együtthatós sorokat lemásoljuk, és hozzávesszük az 1 és -1 együtthatós sorokból képzett összes lehetséges összeget.
(3 pont)

A konkrét végrehajtás:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -6 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 13 & 0 & -9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 0 & -2 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 14 & 0 & -7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ \hline \end{array}$$

(3 pont)

Mivel a kapott egyenlőtlenségekben x_3 mindenütt pozitív együtthatóval szerepel, ezért x_4 tetszőleges választása mellé található megfelelő x_3, majd x_2, végül x_1. Tehát az egyenlőtlenségrendszer megoldható. (2 pont)

---

3. (a) Oldjuk meg az alábbi lineáris programozási feladatot!

   (b) Meg lehet-e változtatni a célfüggvényt úgy, hogy az $x_1 = 4, x_2 = 2$ optimális megoldás legyen? Ha igen, akkor mutassunk példát ilyen célfüggvényre!

$$\begin{aligned} \max\{3x_1 + 5x_2\} \quad & \text{ha} \\ x_1, x_2 \ &\geq 0 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 \ &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \end{aligned}$$

Az (x_1, x_2) megoldásokat a síkon ábrázoljuk. A feltételek egy-egy félsíknak felel meg. A megoldások e félsíkok metszete, egy konvex taromány alkotja. Ezen kell optimalizálnunk a célfüggvényt. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek a pozitív síknegyedet adják, ebből vág le a három félsík egy konvex ötszöget. Az ötszöget határoló egyes egyenesek a 12 és 4, a 6 és 6, ill. az 5 és 10 pontokban metszik az egyes koordinátatengelyeket. Egy ezt ábrázoló rajzért is jár a (2 pont)
A konvex ötszög csúcsai tehát a $(0,0), (0,4)$, és $(5,0)$ pontok, és kis számolással adódik a maradék két csúcs: $(4,2), (3,3)$. (2 pont)
Bármi is legyen a célfüggvény, az optimumát bizonyosan felveszi a fenti 5 pont valamelyikében, ezért csupán ezek közül kell kiválasztani azt, amelyik a maximalizál. (1 pont)
Ez pedig konkrétan az $x_1 = x_2 = 3$ megoldáshoz tartozik, (1 pont)
az optimumérték pedig 24. (0 pont)
Mivel a $(4,2)$ csúcsa a megoldások alkotta konvex tartománynak, ezért alkalmas célfüggvénnyel elérhető, hogy optimális megoldás legyen: pl épp ilyet ad egy olyan egyenlőtlenség a feltételek közül, amely egyenlőséggel teljesül a $(4,2)$ megoldásra. Konkétan az $x_1 + x_2 \leq 6$ ilyen, ezért ha a célfüggvény $\max\{x_1 + x_2\}$ lenne, akkor a kérdezett megoldás optimális. (3 pont)
Ugyanilyen jó célfüggvényt kapunk a másik egyenlőséggel teljesülő feltételből is: $\max\{2x_1 + x_2\}$, de minden olyan $\max\{ax_1 + bx_2\}$ célfüggvény megfelel, amelyre $b \leq a \leq 2b$ áll fenn. (0 pont)

Aki ebben a feladatban csupán a duális programot írja fel, az nem jut közelebb a megoldáshoz (hisz a duálist is optimalizálni kell), ezért 0 pontot kap.

---

4. Határozzuk meg annak a lineáris programnak a duálisát, amit a harmadik felatbeliből úgy kapunk, hogy elhagyjuk az x_2-re kirótt nemnegativitási feltételt és az utolsó előtti egyenlőtlenség irányát megfordítjuk.

   Az órán tanult ökölszabály alapján felírjuk a szamárvezetőként használt táblázatot, amihez a megfordított irányú egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk. (1 pont)

	x_1	x_2	
y_1	1	3	≤ 3
y_2	-1	-1	≤ -6
y_3	2	1	≤ 10
	3	5	

(3 pont)

Mivel csupa egyenlőtlenségből áll az LP, a DLP-beli duális változók nemnegatívak, (2 pont)
az előjelkötetlen x_2-höz tartozó duális feltétel pedig egyenlőséggel teljesül. (2 pont)
Ennek alapján a duális

$$\begin{aligned} \min\{12y_1 - 6y_2 + 10y_3\} \quad & \text{ha} \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 &\geq 3 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 &= 5 \end{aligned}$$

(2 pont)