Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. március 21.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen $A = (1, 1, 2)$, $B = (4, 2, 5)$, $C = (4, 0, 3)$, $D = (10, 2, p)$. Adjuk meg a p paraméter összes olyan értékét, melyre az AB és a CD egyenesek kitérők.

* * * * *

Első megoldás. A két egyenes akkor kitérő, ha se nem párhuzamosak, se nem metszők. Párhuzamosak akkor lesznek, ha az irányvektoraik párhuzamosak. (1 pont)
Az AB egyenes (egyik) irányvektora $(3, 1, 3)$, a CD egyenes (egyik) irányvektora $(6, 2, p - 3)$. (1 pont)
Ezek pontosan akkor párhuzamosak, ha létezik olyan c valós szám, melyre $c \cdot (3, 1, 3) = (6, 2, p - 3)$. Világos, hogy ez pontosan ($c = 2$ és) $p = 9$ esetén teljesül. (1 pont)
Ha a két egyenes nem párhuzamos, akkor meg kell még vizsgálni, hogy metszők-e. Ehhez célszerű felírni a két egyenes egyenletrendszerét: AB (egyik) paraméteres egyenletrendszere az $x = 3t + 1$, $y = t + 1$, $z = 3t + 2$ egyenletekből, CD (egyik) paraméteres egyenletrendszere pedig az $x = 6s + 4$, $y = 2s$,$z = (p - 3)s + 3$ egyenletekből áll. (1 pont)
Innen AB (nem paraméteres) egyenletrendszere $\frac{x-1}{3} = y - 1 = \frac{z-2}{3}$, CD (nem paraméteres) egyenletrendszere pedig $\frac{x-4}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{p-3}$, ha $p \neq 3$, (1 pont)
illetve $\frac{x-4}{6} = \frac{y}{2}$, $z = 3$, ha $p = 3$. (1 pont)
Könnyen kiszámítható, hogy a két egyenletrendszernek egyik esetben sem lesz megoldása, (1+1 pont)
vagyis a két egyenes soha nem lesz metsző. (1 pont)
Az egyenesek tehát pontosan akkor kitérők, ha $p \neq 9$. (1 pont)

* * * * *

Második megoldás. A két egyenes akkor nem kitérő, ha az A, B, C, D pontok egy síkban vannak. (2 pont)
Az ABC síknak normálvektora lesz az $AB = (3, 1, 3)$ és az $AC = (3, -1, 1)$ vektorok vektoriális szorzata, (2 pont)
azaz $\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, ahol $\underline{i}$, $\underline{j}$, és $\underline{k}$ az x, y, illetve z irányú egységvektorok. (1 pont)
A kifejtési tétellel a determinánst kiszámítva a $(4, 6, -6)$ vektor adódik normálvektornak. (1 pont)
Innen a sík egyenlete $2x + 3y - 3z = d$, (1 pont)

d értékére a sík egy tetszőleges pontját (pl. A-t) behelyettesítve a -1-et kapjuk. (1 pont)
A D csúcs akkor lesz a síkban, ha a kapott egyenlet teljesül a koordinátáira, azaz $2\cdot10+3\cdot2-3\cdot p=-1$. (1 pont)
Innen $p=9$, az egyenesek tehát akkor és csak akkor kitérők, ha $p\neq 9$. (1 pont)

2. Legyen M azon 2×3–as mátrixok halmaza, melyekben a bal alsó és a jobb felső elemek összege legalább akkora, mint a bal felső és a jobb alsó elemek összege. Igaz-e, hogy a szokásos mátrixösszeadás és skalárral szorzás műveletekkel M vektorteret alkot?

* * * * *

A 2×3–as mátrixok a szokásos mátrixösszeadás és skalárral szorzás műveletekkel vektorteret alkotnak, a kérdéses struktúra tehát akkor és csak akkor lesz vektortér, ha ennek a térnek az altere. (2 pont)
M akkor és csak akkor altér, ha zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra, (1 pont)
azaz M-beli elemek összege és számszorosa is M-beli. (1 pont)
A skalárral szorzásra M nem zárt, például a $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ mátrix M-beli, míg a -1-szerese nem, (5 pont)
így M nem vektortér. (1 pont)

A 10 vektortéraxióma közül sérül még az ellentettre vonatkozó is, természetesen ezzel is lehet érvelni. Ha valaki nem mutat ellenpéldát, de jól érvel amellett, hogy ilyen létezik, az is elfogadható, ha az érvelés nem tökéletes, részpontot adjunk. Ha valaki nem talál olyan axiómát, ami sérül, akkor az utolsó hat pontból maximum egyet kaphat.

3. Határozzuk meg a p valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\in\mathbb{R}^4$ vektorok független rendszert alkotnak.

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\p\\p+1\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{d}=\begin{pmatrix}1\\5\\9\\6\end{pmatrix}$$

* * * * *

A vektorok akkor és csak akkor alkotnak független rendszert, ha $\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}+\gamma\underline{c}+\delta\underline{d}=\underline{0}$ csak $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ esetén lehetséges, (2 pont)
vagyis ha az $\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&0\\2&3&5&1&0\\3&2&9&p&0\\0&3&6&p+1&0\end{array}\right)$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van. (2 pont)
Gauss-eliminációt alkalmazva az egyenletrendszer az

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&0\\0&1&-3&-1&0\\0&0&1&\frac{4-p}{6}&0\\0&0&0&\frac{7p}{2}-6&0\end{array}\right)$$

alakra hozható, (3 pont)
ahonnan látható, hogy a megoldás pontosan akor lesz egyértelmű, ha $p\neq\frac{12}{7}$. (2 pont)
Így a vektorok $p\neq\frac{12}{7}$ esetén alkotnak független rendszert. (1 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned}x+2y+z&=3\\2x+5y+3z+4w&=8\\3x+6y+cz+cw&=c+6\end{aligned}$$

* * * * *

Gauss-eliminációval az egyenletrendszer az $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & c-3 & c & c-3 \end{array}\right)$ alakra hozható. (2 pont)

Ha $c \neq 3$, akkor a harmadik sort $(c-3)$-mal osztva (1 pont)

és a Gauss-eliminációt folytatva az $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{c}{c-3}-8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4-\frac{c}{c-3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{c-3} & 1 \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakot kapjuk, (2 pont)

ahonnan a megoldás: $x = (8 - \frac{c}{c-3})p$, $y = 1 + (\frac{c}{c-3} - 4)p$, $z = 1 - \frac{c}{c-3}p$, $w = p$, ahol p tetszőleges valós szám. (1 pont)

Ha $c = 3$, akkor az alsó sorban jobbra lépve majd $c = 3$-mal osztva (1 pont)

és a Gauss-eliminációt folytatva az $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakot kapjuk, (2 pont)

ahonnan a megoldás: $x = p - 1$, $y = 2 - p$, $z = p$, $w = 0$, ahol p tetszőleges valós szám. (1 pont)

5. Egy 5×5–ös mátrix determinánsának definíció szerinti kiszámításakor 30 nullától különböző szorzatot kapunk. Igaz-e, hogy ekkor a mátrix legfeljebb 15 nullát tartalmaz?

* * * * *

Tegyük fel, hogy a mátrix legalább 16 nullát tartalmaz. (1 pont)
Ekkor lesz olyan S sora, melyben legalább négy darab nulla van, (1 pont)
ellenkező esetben ugyanis minden sorban csak három nulla lehetne, így összesen csak 15 nulla lehetne a mátrixban. (3 pont)
A determináns definíció szerinti kiszámításakor kapott $5! = 120$ szorzat közül így legfeljebb $4! = 24$ lehet nullától különböző, hiszen az S sorból legfeljebb egy nullától különböző elem választható, (4 pont)
ami ellentmond a feladat feltételének, tehát a mátrix valóban legfeljebb 15 nullát tartalmaz. (1 pont)

6. Létezik-e olyan 5×5–ös mátrix, melynek
a) egyetlen eleme sem 0 és minden előjeles aldeterminánsa 0?
b) egyetlen eleme sem 0 és pontosan egy olyan előjeles aldeterminánsa van, mely nem 0?

* * * * *

Az első kérdésre a válasz igen, nyilván ilyen például a csupa 1-esekből álló mátrix. (2 pont)
A második kérdésre a válasz nem. (Eddig nem jár pont.) Tegyük fel ugyanis indirekten, hogy ilyen mátrix létezik és a determinánsát fejtsük ki aszerint a sor szerint, amelyben az az elem van, melyhez a nem 0 előjeles aldetermináns tartozik. (3 pont)
Mivel itt egy kivétellel minden előjeles aldetermináns 0, a nem 0 aldeterminánshoz tartozó elem viszont nem 0, a teljes determináns értéke nem lehet 0. (3 pont)
Bármely más sor szerint kifejtve a determinánst azonban 0-t kapnánk (hiszen ezekben a sorokban minden elemhez 0 értékű előjeles aldetermináns tartozik), ami nyilván ellentmondás. (2 pont)