Valószínűségszámítás zh megoldás
2014. április 4.

1. Egy 10×10-esnégyzetrácsos padlózatra véletlenül leejtünk 5 db 3 cm-es átmérőjű pénzérmét. A pénzérmék szanaszét gurulva megállnak. *Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 közülük teljesen valamelyik négyzetrács belsejében landol (azaz nincs takarásban semelyik négyzet semelyik oldalával sem)?

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy egy érme középpontja egy négyzet belső 7×7-es négyzetébe essen (ekkor nem metsz oldalélt az érme) $p = \frac{49}{100}$. Az öt érme közül X esik belülre, $x \in B(5, p)$. A keresett valószínűség: $\mathbf{P}(X \geq 3) = \sum\limits_{i=3}^{5} \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i}$.

2. Egy dobozban három különböző színű golyó van: egy-egy piros, fehér és zöld golyó. Véletlenszerűen visszatevéssel addig húzunk a dobozból, amíg mindhárom golyót ki nem húztuk legalább egyszer. Jelölje X a szükséges húzások számát. Adja meg X lehetséges értékeit és eloszlását!

   Megoldás: Az X értékkészlete végtelen számhalmaz: $R_X = \{3, 4, ...\}$.
   $\mathbf{P}(X = i) = 3\left(2^{i-1} - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i$

3. Egy kockával dobunk. Jelölje X a dobott számértéket. Adja meg és rajzolja fel az $Y = |X - 3|$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét! Mennyi Y várható értéke és szórása?

   Megoldás:
   $R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$,
   $p_0 = p_3 = \frac{1}{6}, p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$,
   $\mathbf{E}Y = 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$,
   $\mathbf{E}Y^2 = 9 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{6}$,
   $\sigma Y = \sqrt{\frac{19}{6} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{11}{12}}$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{6} & 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < t \leq 2 \\ \frac{5}{6} & 2 < t \leq 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases}$$

4. Feldobunk két kockát. X a hatosok száma, Y a dobott értékek közül a kisebbik. Adja meg X és Y együttes eloszlásának táblázatát és a peremeloszlásokat! Függetlenek X és Y?

   Megoldás:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	X perem
0	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Y perem	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	

   X és Y nem függetlenek, mert pl. $\mathbf{P}(X = 2, Y = 1) \neq \mathbf{P}(X = 2)\cdot\mathbf{P}(Y = 1)$.

5. Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel és Y normális eloszlású $m = 2$ és $\sigma = 1$ paraméterrel. X és Y független valószínűségi változók. Adja meg X és Y együttes sűrűségfüggvényét! Számolja ki a $Z = 3X - 2Y$ valószínűségi változó várható értékét és szórását!

   Megoldás:
   $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Longrightarrow$
   $f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{2}}, x > 0, y \in \mathbb{R}$
   $\mathbf{E}Z = 3\mathbf{E}X - 2\mathbf{E}Y = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}, \boldsymbol{\sigma} Z = \sqrt{9\boldsymbol{\sigma}^2 X + 4\boldsymbol{\sigma}^2 Y} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$