MATEMATIKA A2 2.ZH jav

2014 december 1.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD
GYAK VEZ

1. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \qquad \text{ahol} \quad k > 0 \quad \text{adott.}$$

2. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

3. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

4. Feladat. Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2) \\ x\neq y}} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

5. Feladat. Határozzuk meg az f parciális deriváltjait ahol léteznek.

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \qquad \text{ahol} \quad k > 0 \quad \text{adott.}$$

1. Megoldás. A faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni (2p). A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor abszolút konvergens (1p).

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{2p}{=} \frac{\frac{(n+1)^k}{(n+1)!}}{\frac{n^k}{n!}} \overset{2p}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot 0 = 0 < 1, \quad (2p)$$

így a sor abszolút konvergens (1p).

2. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

2. Megoldás. Mivel $n \to \infty$ esetén $\frac{x}{n}$ minden x-re 0-hoz tart (2p), a sorozat konvergenciatartománya az egész számegyenes (2p), és határfüggvénye az azonosan 1 függvény (2p).
A sorozat nem egyenletesen konvergens egész értelmezési tartományán, hiszen pl. $\varepsilon < 1$ esetén akármennyinek választjuk is n-et, $|(1 + \frac{x}{n}) - 1| = |\frac{x}{n}| > 1 > \varepsilon$, ha $|x| > n$ (2p). Sőt, akármilyen nagy is n, a határfüggvénytől való eltérés tetszőlegesen nagy lehet, ha x abszolút értéke elég nagy.
A sorozat azonban egyenletesen konvergens akármilyen korlátos halmazon, hiszen ha $|x| \leq K$, akkor $|(1 + \frac{x}{n}) - 1| = |\frac{x}{n}| < \frac{K}{n} < \varepsilon$, ha $n > \frac{K}{\varepsilon}$ (2p).

3. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

3. Megoldás. A konvergenciasugárra vonatkozó képlettel (2p):

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \limsup \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Ennek reciproka is 1 (1p). A hatványsor középpontja $x_0 = 0$ (1p), így a sor abszolút konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon (2p). Ha $x = 1$, a $\sum_1^\infty (1 - \frac{1}{n})^n$ sor tagjai nem tartanak 0-hoz, ($(1 - \frac{1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$) így a sor itt divergens (2p). Ha $x = -1$, az összeg tagjai szintén nem tartanak 0-hoz (1p). Így a sor divergens a $(-1, 1)$ intervallumon kívül (1p).

4. Feladat. Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x\neq y}} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

4. Megoldás. A határérték $\frac{0}{0}$ alakú (2p), ezért átalakítjuk a törtet.
$\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \overset{2p}{=} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \overset{2p}{=} \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \overset{2p}{=} x(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, ha $x \neq y$. Így a keresett határérték $4\sqrt{2}$ (2p).

5. Feladat. Határozzuk meg az f parciális deriváltjait ahol léteznek.

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

5. Megoldás. Ha $(x, y) \neq (0, 0)$ akkor $\boxed{\mathbf{3p + 3p}}$

$$f'_x(x, y) = \frac{6x^2(x^2 + y^2) - (2x^3 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{-2y(x^2 + y^2) - (2x^3 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ha $(x, y) = (0, 0)$ akkor $\boxed{\mathbf{2p + 2p}}$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{x^2}}{x} = 2,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^2}{y^2}}{y} = \nexists.$$
