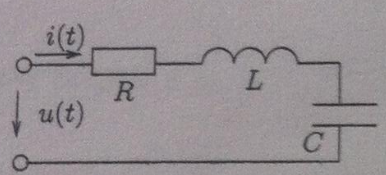
SOLUTIONS

1. Adja meg az alapkörfrekvenciáját és Fourier-sora állandó összetőjét annak a periodikus $u(t)$ feszültségnek, amelyre $u(t) = (10V/ms) \cdot t$, ha $0 \leq t < 0,5\pi$ és $u(t+0,5\pi) = u(t)$ minden t esetén (az idő egysége ms).

$\omega_0 = 4krad/s$ $U_0 = 2,5\pi V \approx 7,854V$

2. 

Egy soros RLC-kétpólus feszültsége $u(t) = [10 + 20\cos\omega_0 t]V$, $R = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = 10\Omega$. Adja meg a kétpólus $i(t)$ áramának időfüggvényét!

$i(t) = (2\cos\omega_0 t)A$

3. Határozza meg az $x(t) = \left[\varepsilon(t) - \varepsilon\left(t - \frac{1}{\alpha}\right)\right] e^{-\alpha t}$ jel Fourier-transzformáltját!

$X(j\omega) = \frac{1}{\alpha+j\omega}\left(1 - e^{-1-j\frac{\omega}{\alpha}}\right)$

4. Egy folytonos idejű rendszert soros RC-kétpólus reprezentál, amelynek bemenő jele a kétpólus feszültsége, válasza a kondenzátor feszültsége. Adja meg a rendszer sávszélességét, ha az áteresztő tartományban az ampitudókarakterisztika maximumtól való eltérése nem lehet több, mint 3 dB!

$\Delta\omega = \frac{1}{CR}$

5. Egy L induktivitású tekercs **árama** I_0, ha $t < 0$, és $I_0 e^{-\alpha t}$, ha $t \geq 0$. Határozza meg a tekercs **feszültségének** Laplace-transzformáltját!

$U_L(s) = \frac{-\alpha I_0 L}{s+\alpha}$

6. Határozza meg a $h(t) = A\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\sin\beta t$ impulzusválaszú rendszer átviteli függvényét, vagy indokolja, ha a feladat nem megoldható!

$H(s) = A\frac{\cancel{s+\alpha}\ \beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

7. Egy $H(j\omega) = \frac{j\omega+\alpha}{j\omega+2\alpha}$, $(\alpha > 0)$ átviteli karakterisztikájú rendszer bemenő jele $u(t) = U_0\varepsilon(t)e^{-\alpha t}$. Határozza meg a válasz időfüggvényét!

$y(t) = U_0\varepsilon(t)e^{-2\alpha t}$

8. Egy folytonos idejű rendszer két pólusa $p_1 = \alpha + j\beta$, $p_2 = \alpha - j\beta$, két zérusa z_1, z_2, ahol α és β valós, z_1, z_2 nem feltétlenül valós szám. Mely α, β, z_1 és z_2 értékekre minimálfázisú a rendszer?

   $\alpha < 0$, $\mathrm{Re} z_1 < 0$, $\mathrm{Re} z_2 < 0$, β is optional

9. Adott egy diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása: $\begin{aligned} x[k+1] &= ax[k] + bu[k] \\ y[k] &= cx[k] + du[k] \end{aligned}$

   Határozza meg az impulzusválasz értékeit a $k = 0$ és a $k = 1$ ütemben!

   $h[0] = d$ $\qquad$ $h[1] = bc$

10. Határozza meg az előző pontban az állapotváltozós leírásával adott rendszer átviteli függvényét!

    $H(z) = \frac{d + (bc - ad)z^{-1}}{1 - az^{-1}}$

11. Adott egy 8 periódushosszú diszkrét idejű periodikus jel: $x[k] = 4\delta[k] - 4\delta[k-2]$, ha $0 \leq k \leq 7$. Határozza meg a jel Fourier-sora $\frac{\pi}{2}$ diszkrét körfrekvenciához tartozó komponensének valós amplitudóját és fázisszögét!

    $X_2 = 2$ $\qquad$ $\rho_2 = 0$

12. Határozza meg az **amplitudóspektrumát** az $x[k] = 4\delta[k] - 4\delta[k-2]$ diszkrét idejű jelnek!

    $X(\vartheta) = 8|\sin\vartheta|$ $\qquad$ $\left(= \sqrt{32(1 - \cos 2\vartheta)}\right)$

13. Határozza meg a z-transzformáltját az $x[k] = 1 + \varepsilon[k]\left(2 \cdot 0,5^k - 2\right)$ diszkrét idejű jelnek, vagy indokolja, ha a feladat nem megoldható!

    $X(z) = \frac{z^2 - 1,5z}{z^2 - 1,5z + 0,5}$

14. Határozza meg az $y[k] - 0,64y[k-2] = 2u[k] + 4u[k-1]$ rendszeregyenlettel adott diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikáját!

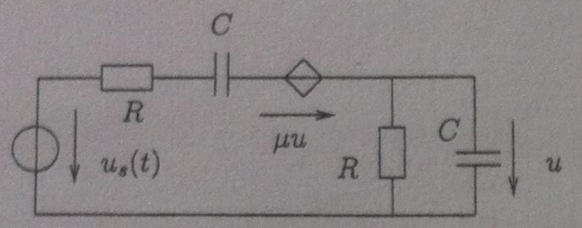
    $H(e^{j\vartheta}) = \frac{2 + 4e^{-j\vartheta}}{1 - 0,64e^{-j2\vartheta}}$

15. Egy véges impulzusválaszú (FIR-típusú) diszkrét idejű rendszer zérusai: $z_1 = 0,5$ és $z_2 = 2$, impulzusválaszának értéke a $k = 0$ ütemben 10. Adja meg a rendszer impulzusválaszának időfüggvényét!

    $h[k] = 10\delta[k] - 25\delta[k-1] + 10\delta[k-2]$

SOLUTIONS

1. nagyfeladat *(Kérjük, a megoldást külön lapra írja!)*



Az ábrán látható hálózat által reprezentált rendszer bemenő jele az $u_s(t)$ forrásfeszültség, válasza a bejelölt u feszültség.

(a) Adja meg a rendszer átviteli függvényét normálalakban! *(2,5 pont)*

(b) A μ paraméter mely tartományában gerjesztés-válasz stabilis a rendszer, ha $C > 0$ és $R > 0$? *(1 pont)*

Bizonyos numerikus értékek és a V, mA, ms koherens mértékegységrendszerben az átviteli függvény alakja: $H(s) = \dfrac{2s}{s^2 + 5s + 4}$.

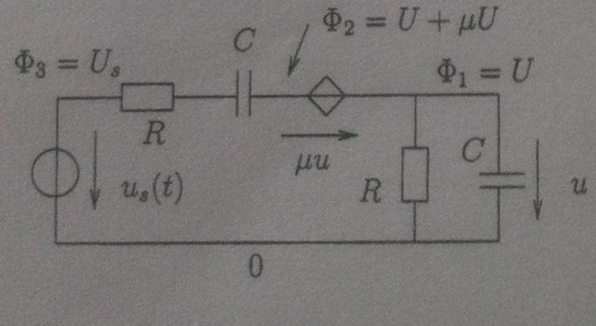
A továbbiakban az ezen paraméterértékekkel megadott rendszerre végezze a számításait!

(c) Határozza meg a rendszer impulzusválaszát és adja meg a mértékegységét is a V, mA, ms egységekkel koherens módon! *(2 pont)*

(d) A rendszer bemenő jele az a π ms periódusidejű periodikus feszültség, amelynek komplex Fourier-együtthatói a következők: $U^C_{s0} = 20V$, $U^C_{s1} = 5e^{-j20^\circ}V$ és $U^C_{s2} = 1{,}5e^{j30^\circ}V$. Határozza meg a válaszfeszültség időfüggvényét másodrendű valós Fourier-polinomos közelítésben! *(2 pont)*

Solution

(a)



The Kirchhoff current law with the Laplace transforms of the nodal potentials noted in the figure for the closed surface which covers the controlled source is:

$\frac{U+\mu U-U_s}{R+\frac{1}{sC}} + \frac{U}{R} + UsC = 0.$ *(1,5 points)*

Multiplying both sides by $R(sCR+1)$

$$UsCR + \mu UsCR - U_s sCR + U(1 + sCR) + UsCR(1 + sCR) = 0$$

$$U\left(s^2C^2R^2 + (3+\mu)sCR + 1\right) = U_s sCR$$

$$U = U_s \frac{sCR}{s^2C^2R^2 + (3+\mu)sCR + 1}$$ *(0,5 points)*

The transfer function in normal form is:

$$\boxed{H(s) = \frac{\frac{1}{CR}s}{s^2 + \frac{3+\mu}{CR} + \frac{1}{C^2R^2}}}$$ *(0,5 points)*

2,5 points

(b) The denominator is Hurwitz polynomial, (the system is BIBO stable) if $\boxed{\mu > -3.}$ **1 point**

(c) $H(s) = \frac{2s}{s^2+5s+4} = \frac{2s}{(s+4)(s+1)} = \frac{\frac{8}{3}}{s+4} + \frac{-\frac{2}{3}}{s+1}$ *(1 point)*

$\boxed{h(t) = \varepsilon(t)\left(2,6667e^{-4t} - 0,6667e^{-t}\right)\frac{1}{ms}}$ *(1 point)* (Without the proper unit *0,5 points*)

2 points

(d) The input signal in second order Fourier polynomial approximation is:
$u_s(t) = [20 + 10\cos(2t - 20^o) + 3\cos(4t + 30^o)]\,V.$ *(0,5 points)*
The frequency response is $H(j\omega) = \frac{2j\omega}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4}$
$H(j\omega)|_{\omega=0} = 0, \quad H(j\omega)|_{\omega=2} = \frac{j4}{j10} = 0,4,$
$H(j\omega)|_{\omega=4} = \frac{j8}{-12+j20} = 0,3430e^{-j30,96^o}$ *(1 point)*
$\boxed{u(t) = [4\cos(2t - 20^o) + 1,0290\cos(4t - 0,96^o)]\,V}$ *(0,5 points)* **2 points**
$(-0,0168)$

2. nagyfeladat *(Kérjük, a megoldást külön lapra írja!)*

Egy diszkrét idejű rendszer az $y[k] - 0,5y[]k - 1 = 2u[k] - u[k-2]$ rendszeregyenlettel adott.

(a) Határozza meg a rendszer átviteli függvényét normálalakban és ábrázolja a pólus-zérus elrendezést! *(2 pont)*

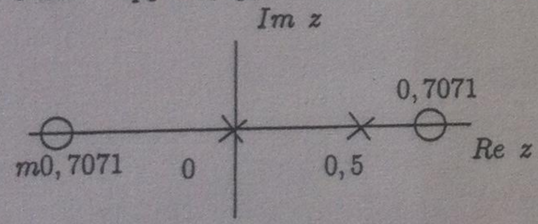
(b) Határozza meg a rendszer válaszának időfüggvényét az $u_b[k] = 10\cos\pi k$ bemenő jelre! *(2 pont)*

(c) Határozza meg a rendszer válaszának időfüggvényét az $u_c[k] = \varepsilon[k]10\cos\pi k$ belépő gerjesztésre! *(2,5 pont)*

(d) Adja meg a (c) pontbeli válaszjel szabad és gerjesztett összetevőjét! *(1 pont)*

Solution

(a) $H(z) = \frac{2-z^{-2}}{1-0,5z^{-1}} = \frac{2z^2-1}{z(z-0,5)} = \frac{2(z+\sqrt{0,5})(z-\sqrt{0,5})}{z(z-0,5)}$ *(1 point)*
Poles: $p_1 = 0,\ p_2 = 0,5;$ Zeros: $z_1 = 0,7071,\ z_2 = -0,7071.$



(1 point) **2 points**

(b) $H(e^{j\vartheta}) = \frac{2-e^{-j2\vartheta}}{1-0,e^{-j\vartheta}}$ $H(e^{j\vartheta})|_{\vartheta=\pi} = \frac{1}{1,5} = 0,6667$ *(1,5 points)*
$\boxed{y_b[k] = 6,6667\cos\pi k}$ *(0,5 points)* **2 points**

(c) $U_c(z) = \frac{10z}{z+1}$ *(1 point)*
$Y_c(z) = U_c(z)H(z) = \frac{10z}{z+1}\frac{2-z^{-2}}{1-0,5z^{-1}}\frac{z^2}{z}z^{-1} = z^{-1}z\frac{20z^2-10}{z^2+0,5z-0,5} = z^{-1}z\frac{20(z^2+0,5z-0,5)-10z}{z^2+0,5z-0,5}$
$Y_c(z) = z^{-1}z\left(20 + \frac{-10z}{(z+1)(z-0,5)}\right) = z^{-1}z\left(20 + \frac{-6,6667}{z+1} + \frac{-3,3333}{z-0,5}\right)$ *(1 point)*
$Y_c(z) = 20 + z^{-1}\left(-6,6667\frac{z}{z+1} - 3,3333\frac{z}{z-0,5}\right)$
$\boxed{y_c[k] = 20\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(-6,6667\cdot(-1)^{k-1} - 3,3333\cdot 0,5^{k-1}\right)}$ *(0,5 points)*
2,5 points

(d) $y_{cg}[k] = -6,6667\cdot(-1)^{k-1} = 6,6667\cos k\pi$, if $k \geq 1$
$y_{cf}[k] = 20\delta[k] - 3,3333\varepsilon[k-1]0,5^{k-1} - y_{cg}[0]\delta[k] = 13,3333\delta[k] - 3,333\varepsilon[k-1]0,5^{k-1}$
1 point