1. A p paraméter mely értékeire lesz az $x^2+(2p+2)\cdot x-(2p-1)=0$ egyenletnek egy kétszeres valós gyöke ?

$D=(2p+2)^2+4\cdot(2p-1)=0 \Leftrightarrow (p+1)^2+(2p-1)=0 \Leftrightarrow p^2+4p=0 \Leftrightarrow p\cdot(p+4)=0 \Rightarrow \boxed{p=0,\ -4}$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet : $3\,\mathrm{tg}^2\,x-1=\dfrac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 3\,\mathrm{tg}^2\,x-1=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 3\,\mathrm{tg}^2\,x-1=1+\mathrm{tg}^2\,x$

$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{tg}^2\,x=2 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,x=\pm 1 \Leftrightarrow \boxed{x=\dfrac{\pi}{4}+k\cdot\dfrac{\pi}{2},\quad k\in\mathbf{Z}}$.

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert :

$$\left.\begin{aligned} 2^x\cdot 4^y &= 16 \\ 2\cdot\lg(x+y)-\lg y &= 2\lg 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2^{x+2y} &= 2^4 \\ \lg\frac{(x+y)^2}{y} &= \lg 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+2y &= 4 \\ (x+y)^2 &= 9y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y &= 4-y \\ (4-y)^2 &= 9y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$y^2-17y+16=0 \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= 1 & x_1 &= 4-2=2 \\ y_2 &= 16 & x_2 &= 4-32=-28 \end{aligned}\right\}$ **Megoldás :** $\boxed{x=2\quad y=1}$ (csak ez a gyök megfelelő) .

4. Legyen (a_n) számtani sorozat, $s_2-s_4+a_2=14$, $s_3+a_3=17$. Adjuk meg az a_1 és d értékeket !

$-(a_3+a_4)+a_2=14 \Leftrightarrow -(2a_2+3d)+a_2=14 \Leftrightarrow -a_2-3d=14 \Leftrightarrow a_2=-14-3d$. $(a_1+a_2+a_3)+a_3=17$

$\Leftrightarrow 3a_2+a_2+d=17 \Rightarrow 4\cdot(-14-3d)+d=17$. $\Rightarrow -56-11d=17$. $\Rightarrow \boxed{d=-\dfrac{73}{11},\quad a_1=-14+4\cdot\dfrac{73}{11}=\dfrac{138}{11}}$.

---

1. A k paraméter mely értékeire lesz az $x^2+2k\cdot x-(2k-3)=0$ egyenletnek egy kétszeres valós gyöke ?

$D=(2k)^2+4\cdot(2k-3)=0 \Leftrightarrow k^2+2k-3=0$ $\boxed{k=1,\ -3}$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet : $\mathrm{ctg}\,x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2 \Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2 \Rightarrow$

$(1+\cos x)\cdot\cos x+\sin^2 x=2\cdot(1+\cos x)\cdot\sin x \Leftrightarrow \cos x+1=2\cdot(1+\cos x)\cdot\sin x \Leftrightarrow 1=2\cdot\sin x \Leftrightarrow$

$\sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\cdot\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert :

$$\left.\begin{aligned} 3^y\cdot 9^x &= 81 \\ \lg(x+y)^2-\lg x &= 2\lg 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3^{y+2x} &= 2^4 \\ \lg\frac{(x+y)^2}{x} &= \lg 9 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x+y &= 4 \\ (x+y)^2 &= 9x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y &= 4-x \\ (4-x)^2 &= 9x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x^2-17x+16=0 \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 & y_1 &= 4-2=2 \\ x_2 &= 16 & y_2 &= 4-32=-28 \end{aligned}\right\}$ **Megoldás :** $\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 & y_1 &= 2 \\ x_2 &= 16 & y_2 &= -28 \end{aligned}\right\}$ (mindkét gyök megf.)

4. Legyen (a_n) számtani sorozat, $5a_1+10a_5=0$, $s_4=14$. Adjuk meg az a_1 és d értékeket !

$a_1+2\cdot(a_1+4d)=0 \Leftrightarrow 3a_1=-8d$, $(2a_1+3d)\cdot 2=14 \Leftrightarrow 2a_1+3d=7$.

$6a_1=-16d$, $-16d+9d=21 \Rightarrow d=-3$, $3a_1=-8\cdot(-3) \Rightarrow \boxed{a_1=8,\quad d=-3}$.