2. Gyakorlat

2. Tantermi gyakorlat – Szabályozási kör analízise

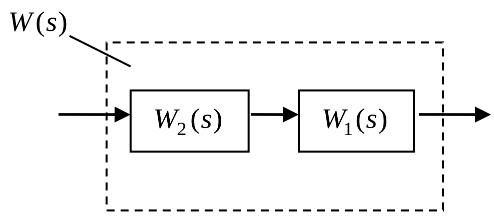
A tantermi gyakorlat célja, hogy a hallgatók gyakorlati ismereteket szerezzenek dinamikus és visszacsatolt rendszerek tulajdonságainak feltérképezésében, és megismerjék a támogató Matlab Control System Toolbox (CST) szolgáltatásait. A tantermi gyakorlaton sor kerül az alrendszerekből álló rendszer eredő átviteli függvényének kiszámítására, az amplitúdó- és fázis-jelleggörbe, az átmeneti függvény és a súlyfüggvény meghatározására. A tantermi gyakorlat fontos részét képezi zárt rendszer dinamikus jellemzői (gyökhelygörbe, vágási frekvencia, fázistartalék) számításának Matlab függvényekkel történő bemutatása egy mintarendszeren keresztül. A tantermi gyakorlat keretében bemutatjuk még egy lineáris időinvariáns (LTI) szabályozási kör teljes vizsgálatát a Matlab Control System Toolbox szolgáltatásait tömörítő LTI Viewer segítségével. Végül egy esettanulmányon keresztül egy szatellit rendszer orientáció-szabályozási körének analízise történik P, PD szabályozókat felvonultató irányítások esetén.

Eredő átviteli függvények meghatározása

Egy szabályozási kör több alrendszerből áll, amelyek mindegyike egy-egy átviteli függvénnyel rendelkezik. Természetesen egy alrendszer is további alrendszerekből épülhet fel. Az alrendszerek tipikusan sorosan, párhuzamosan vagy visszacsatoláson keresztül vannak egymáshoz kapcsolva. A szabályozás során a cél a teljes rendszer technológia által megkívánt viselkedésének elérése a kör egyes alrendszereinek (köztük a szabályozónak) megfelelő paraméter-beállításával, ezért a szabályozási kör eredő átviteli függvényének meghatározása alapvető fontosságú.

Soros kapcsolás

Legyen $W(s)$ a $W_1(s)$ átviteli függvénnyel és a $W_2(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező (egy bemenetű–egy kimenetű, SISO) alrendszerek soros összekapcsolásával adódó rendszer átviteli függvénye, ahogyan azt a *2.1. ábra* illusztrálja. Ekkor a $W_1(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező alrendszer bemenő jelét a $W_2(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező alrendszer kimenő jele szolgáltatja.



2.1. ábra. Két alrendszer soros kapcsolása

Az eredő átviteli függvény a két alrendszer átviteli függvényének szorzatával állítható elő:

$$W(s) = W_1(s)W_2(s)$$

Matlab CST környezetben a <u>sorosan</u> kapcsolt alrendszerek eredő átviteli függvényének előállítása a

\

$$W(s) = \frac{num}{den}, \quad W_1(s) = \frac{num1}{den1}, \quad W_2(s) = \frac{num2}{den2}$$

jelölések mellett többféleképpen is előállítható (`num, den, num1, den1, num2, den2` vektorok Matlab értelmezés szerint, `sys` egy struktura, `sys.num` egy cella, `sys.num{1}` a cella első és SISO esetben egyetlen eleme, stb.):

- CST függvénnyel: `[num,den]=series(num1,den1,num2,den2);`
- Konvolúcióval: `num=conv(num1,num2); den=conv(den1,den2);`
- LTI1: `W1=tf(num1,den1); W2=tf(num2,den2); W=series(sys2,sys1);`
  `num=W.num{1}; den=W.den{1); %only if num, den are needed`
- LTI2: `W1=tf(num1,den1); W2=tf(num2,den2); W=W1*W2;`
  `num=W.num{1}; den=W.den{1); %only if num, den are needed`

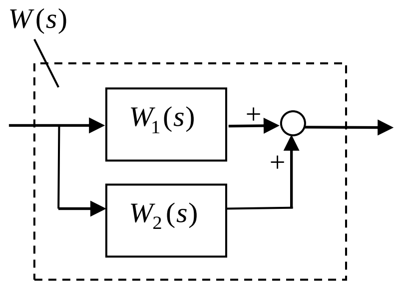
Felhívjuk a figyelmet arra, hogy MIMO esetben az argumentumok sorrendje is lényeges!

Párhuzamos kapcsolás

Amennyiben a $W_1(s)$ átviteli függvénnyel és a $W_2(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező alrendszerek párhuzamosan vannak kapcsolva, akkor mindkét alrendszer ugyanazt a bemenetet kapja, a kimeneteik pedig összeadódnak (2.2. ábra).

Az eredő átviteli függvény a két alrendszer átviteli függvényének összegével állítható elő

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s)$$



2.2. ábra. Két alrendszer párhuzamos kapcsolása

Matlab CST környezetben a párhuzamosan kapcsolt alrendszerek eredő átviteli függvényének előállítása a korábbi

$$W(s)=\frac{num}{den},\quad W_1(s)=\frac{num1}{den1},\quad W_2(s)=\frac{num2}{den2}$$

jelölések mellett (`num, den, num1, den1, num2, den2` vektorok Matlab értelmezés szerint, `sys` egy struktura, `sys.num` egy cella, `sys.num{1}` a cella első és SISO esetben egyetlen eleme, stb.) a Matlab `parallel` függvényével állítható elő:

- CST függvénnyel: `[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2);`
- LTI1: `W1=tf(num1,den1); W2=tf(num2,den2); W=parallel(sys1,sys1);`
  `num=W.num{1}; den=W.den{1}; %only if num, den are needed`
- LTI2: `W1=tf(num1,den1); W2=tf(num2,den2); W=W2+W1;`
  `num=W.num{1}; den=W.den{1}; %only if num, den are needed`

Vigyázat, mert num=conv(num1,den2)+conv(num2,den1); den=conv(den1,den2); problematikus, mert
- csak egyforma méretű vektorok adhatók össze,
- `A+c` az `A` mátrix vagy vektor minden eleméhez hozzáadja a `c` skalár értékét.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy MIMO esetben az argumentumok sorrendje is lényeges, mert befolyásolja a jelek sorrendjét az eredő sys rendszerben !

Visszacsatolás

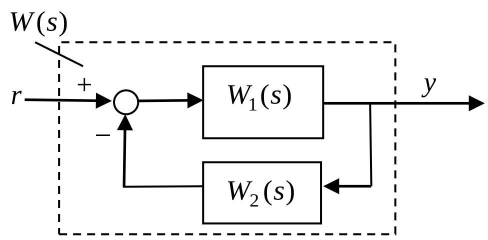
A szabályozási körök alapvető jellemzője a visszacsatolás. Tekintsük a *2.3. ábrán* látható negatív visszacsatolással rendelkező rendszert. A rendszer bemenete és kimenete között az alábbi összefüggés vezethető le:

$$y(s)=W_1(s)[r(s)-W_2(s)y(s)]$$
$$[1+W_1(s)W_2(s)]y(s)=W_1(s)r(s)$$
$$W(s)=\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{W_1(s)}{1+\underbrace{W_1(s)W_2(s)}_{W_0(s)}}=:\frac{W_1(s)}{1+W_0(s)}$$

ahol $W_1(s)$ a bemenet és a kimenet közötti „előrevezető ág" átviteli függvénye, tehát az az átviteli függvény, amely akkor keletkezne, ha a hurok visszacsatoló ágában valahol szakadás lenne. A levezetés során bevezettük még a $W_0(s)$ hurokátviteli függvényt.

A fentiek alapján az eredő átviteli függvényre az alábbi általános szabály fogalmazható meg egyetlen hurok esetén:

$$W(s)=\frac{W_1(s)}{1+W_0(s)}$$ ="előre vezető ág/(1 plusz a hurok)"



2.3. ábra. Visszacsatolásos kapcsolás

Negatív visszacsatolás esetén a $W_0(s)$ hurokátviteli függvény a szabályozási körben csak a hurokban lévő tagokat veszi figyelembe, és a képletben $W_0(s) = W_1(s)W_2(s)$ helyettesítendő.
Pozitív visszacsatolás esetén a képletbe $W_0(s) = -W_1(s)W_2(s)$ helyettesítendő.

Matlab CST környezetben a visszacsatolásos kapcsolás eredő átviteli függvényének előállítása a korábbi

$$W(s) = \frac{num}{den}, \quad W_1(s) = \frac{num1}{den1}, \quad W_2(s) = \frac{num2}{den2}$$

jelölések mellett a Matlab `feedback` függvényével állítható elő:

- CST függvénnyel: `[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2,sign);`
- LTI: `W1=tf(num1,den1); W2=tf(num2,den2); W=feedback(sys1,sys2,sign);`
  `num=W.num{1}; den=W.den{1}; %only if num, den are needed`

Itt `sign` a visszacsatolás előjele (-1 vagy +1), default értéke a –1, ami el is hagyható negatív visszacsatolás esetén. Ügyeljünk a paraméterek sorrendjére!

Példa visszacsatolt rendszer eredő átviteli függvényének számítására

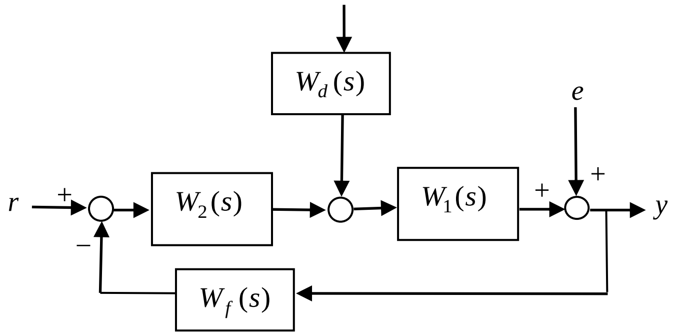
A *2.4. ábrán* egy visszacsatolást valamint zavaró jeleket (d és e) tartalmazó rendszer látható. Az előzőekben megfogalmazott elvek alapján az egyes bemenetek és a kimenet közötti átviteli függvények a következők (az s-től való függést a könnyebb olvashatóság érdekében elhagyva) :

$$W_{yr} = \frac{W_1W_2}{1+W_1W_2W_f}, \qquad W_{yd} = \frac{W_1W_d}{1+W_1W_2W_f}, \qquad W_{ye} = \frac{1}{1+W_1W_2W_f}$$

A komponens átviteli függvényeket a szuperpozíció elve alapján és a visszacsatolt rendszerek alapképletének felhasználásával határoztuk meg. Az átviteli függvény itt

d

valójában egy 1×3 méretű mátrix, amelynek 1 sora és 3 oszlopa van, mivel a kimenet y és a bemenetek rendre r, d, e.



2.4. ábra. Példa visszacsatolt rendszerre.

Logikus kérdés, hogy miként határozható meg a kimenő jel, ha a bemenetek egyszerre gerjesztettek. A szuperpozíció elve alapján a kimenő jel Laplace-transzformáltja az egyes bemenetekről gerjesztett kimenetek Laplace-transzformáltjainak összege. A példa esetén ez a következő:

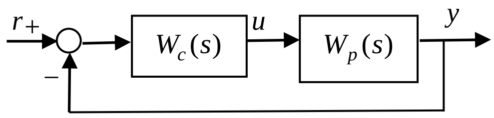
$$Y(s) = W_{yr}(s)R(s) + W_{yd}D(s) + W_{ye}(s)E(s)$$

ahol $Y(s)$, $R(s)$, $D(s)$, $E(s)$ az $y(t)$, $r(t)$, $d(t)$, $e(t)$ időtartománybeli jelek Laplace-transzformáltjai. Az $y(t)$ kimenő jel az időtartományban az $Y(s)$ inverz Laplace-transzformációjával kapható meg, de szerencsére a CST eszközeivel ezt megkerülhetjük.

Zárt rendszer jellemzői

A mintarendszer

Tekintsük a *2.5. ábrán* látható szabályozási rendszert, ahol $W_p(s)$ A szakasz, $W_c(s)$ a szabályozó átviteli függvénye.



2.5. ábra. A mintarendszer

Az irányítandó szakasz három egytárolós tagból áll, T_1, T_2, T_3 időállandóval, az átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{A}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

A statikus erősítés és az időállandók értéke legyen rendre:

$$A = 5$$
$$T_1 = 10 \text{ sec}$$
$$T_2 = 4 \text{ sec}$$
$$T_3 = 1 \text{ sec}$$

A szabályozót megtestesítő $W_c(s)$ egyelőre legyen egy egységnyi erősítésű tag, azaz $W_c(s) = 1$. A szakasz és a szabályozó megadása Matlab környezetben (többek között) a következő utasításokkal tehető meg:

```
% Szakasz Átviteli függvény
A=5; T1=10; T2=4; T3=1;
numps=A;
denps=conv(conv([T1 1],[T2 1]),[T3 1]);
sysp_tf=tf(numps,denps)
```

A `sysp_tf` egy struktúrában tárolt cellatömböket tartalmaz (erről meggyőződhetünk `get(sysp_tf)` kiadásával), amelyből az átviteli függvény számlálója és nevezője (amint azt korábban már láttuk) a következő utasításokkal nyerhető ki:

```
sysp_tf.num{1}
sysp_tf.den{1}
```

A rendszer gyöktényezős alakba konvertálható a következő utasításokkal:

```
sysp_zpk=zpk(sysp_tf),
```

ahol `sysp_zpk.k` adja a statikus erősítést, `sysp_zpk.p{1}` a pólusokat, `sysp_zpk.z{1}` pedig a zérusokat tartalmazó vektor. A rendszer állapotteres leírása szintén megadható a

```
sysp_ss=ss(sysp_tf)
```

utasítással, ahol rendre `sysp_ss.a`, `sysp_ss.b`, `sysp_ss.c`, `sysp_ss.d` adják az állapotteres leírás mátrixait. A struktúra ábrázolása `get(sysp_ss)` hatására megtekinthető.

A zárt kör vizsgálata előtt tekintsük a szakasz tulajdonságait! A szakasz Bode-diagramját a Matlab CST-ben kiadott

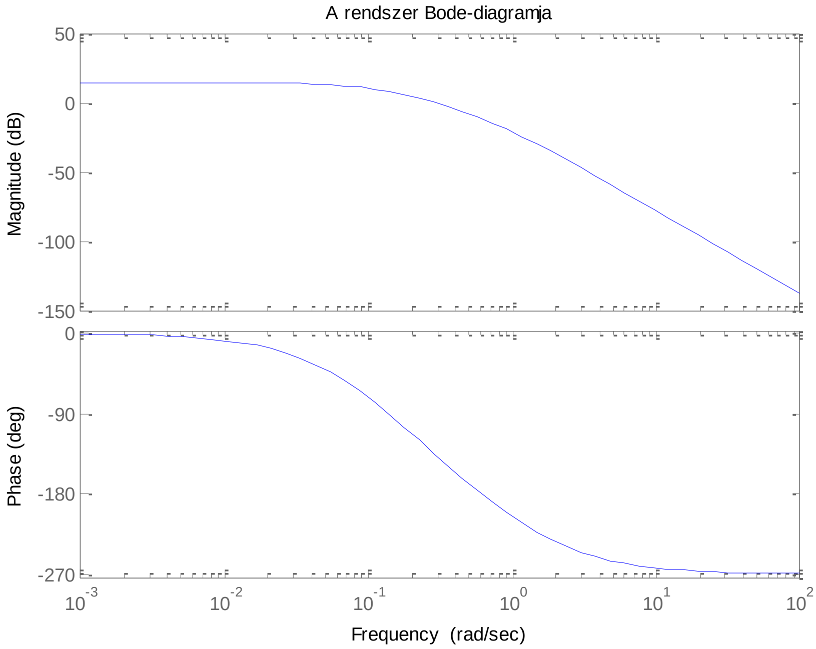
```
figure(1);
bode(sysp_tf);
title('A rendszer Bode-diagramja');
```

utasításokkal rajzolhatjuk ki egy Figure 1 nevezetű ablakban, ami a *2.6. ábrát* eredményezi. A `title` függvény az ábra feliratozását végzi. A Bode-diagramban felrajzolt értékek numerikusan is megadhatók a

```
[wp_mag,wp_phase,wp_w]=bode(sysp_tf);
```

függvényhívással, ahol a `wp_mag`, `wp_phase`, `wp_w` oszlopvektorok azonos sorban található elemei adják az összetartozó amplitúdó, fázis és (kör)frekvencia értékeket. Mivel a szakasznak három pozitív időállandója van, a pólusok a negatív valós tengelyen helyezkednek el az

$$s_1 = -\frac{1}{T_1}, \qquad s_2 = -\frac{1}{T_2}, \qquad s_1 = -\frac{1}{T_3}$$



2.6. ábra. A szakasz Bode-diagramja.

helyeken, amelyek egyúttal az amplitúdó-jelleggörbe (a Bode-diagram felső ábrája) törésponti frekvenciáit adják. Minden törésponti frekvencia után az amplitúdó-jelleggörbe –20dB/dekád meredekséggel változik (asszimptotikusan). Az amplitúdó-jelleggörbéből leolvasható, hogy a kis frekvenciákon jó közelítéssel 0dB/dekád meredekségű egyenes a statikus erősítésnek megfelelő értéket veszi fel (decibelben) A pólusok nagy frekvenciaértékeken -90°-kal járulnak hozzá egyenként a fázismenethez, amelyek a 3 pólus esetén összesen -270 fokot eredményez. Mivel minden pólus negatív és nincs zérus, a kis frekvenciaértékhez képest a törésponti frekvenciákon a fázisváltozás -45°, míg a nagy frekvenciákon -90°. Minden pólus hatása összegződik a fázis-jelleggörbén, mivel komplex számok esetén $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, ahol arg a komplex szám fázisszögét jelöli.

A szakasz átmeneti függvénye a *2.7. ábrán* látható, amely Matlab CST környezetben

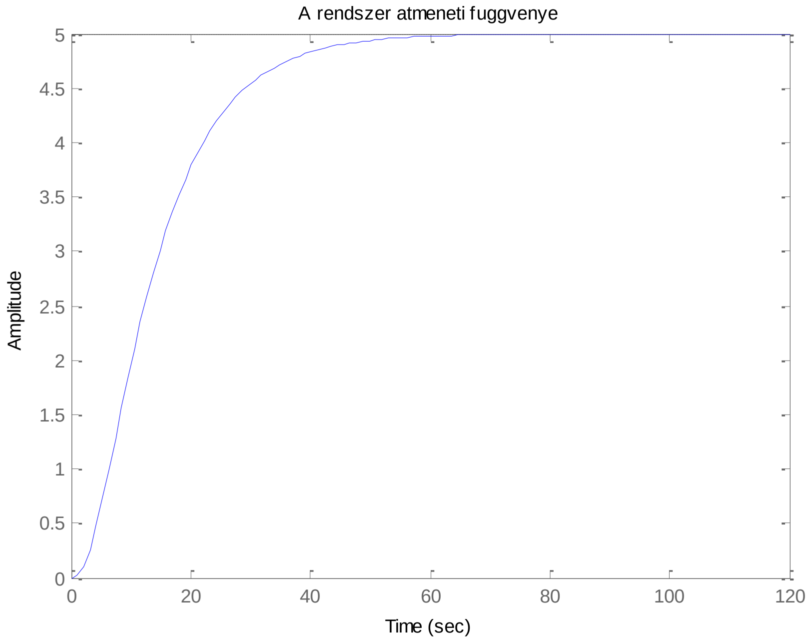
```
step(sysp_tf);
title('A rendszer atmeneti fuggvenye');
```

utasításokkal nyerhető. A `step` függvény numerikus értékeket szolgáltat, ha a visszatérési értékeket változókba mentjük:

```
[wp_step_y,wp_step_t]=step(sysp_tf)
```

Ekkor `wp_step_y,wp_step_t` oszlopvektorok megegyező soraiban az összetartozó időpont és kimenet párok szerepelnek. Vegyük észre, hogy a $v(t)$ átmeneti függvény (ugrásválasz) a statikus erősítésnek megfelelő értéken áll be hosszú idő után, amely a végérték-tétellel is ellenőrizhető:

$$\begin{aligned} v(\infty) &= \lim_{s\to 0} sW_p(s)L\{1(t)\} = \lim_{s\to 0} sW_p(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} W_p(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{A}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)} = A \end{aligned} \tag{2.1}$$



2.7. ábra. A szakasz átmeneti függvénye.

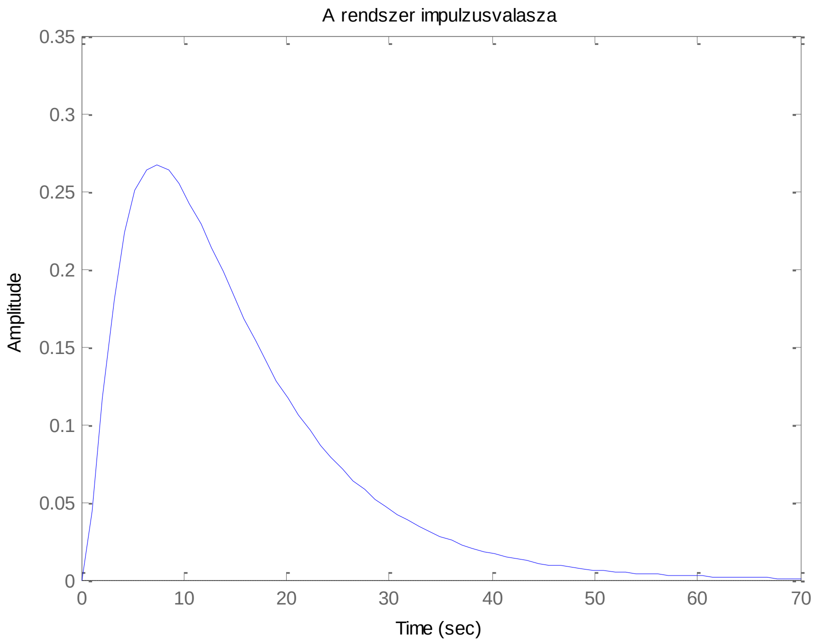
Az átmeneti függvény alakját a szakasz dinamikája határozza meg. Ennek megfelelően az átmeneti függvény alakja

$$v(t) = a_1 + a_2 e^{s_1 t} + a_3 e^{s_2 t} + a_4 e^{s_3 t} \tag{2.2}$$

ahol az a_1, a_2, a_3, a_4 konstansok a $W_P(s)/s$ részlettörtekre bontásával határozhatók meg. A $v(t)$ átmeneti függvény alakjából látható, hogy minél negatívabb pólusai vannak a szakasznak, annál gyorsabban csengenek le a tranziensek.

A rendszer impulzusválasza a *2.8. ábrán* látható, amely a következő Matlab kóddal generálható

```
impulse(sysp_tf);
title('A rendszer impulzusvalasza');
```



2.8. ábra. A szakasz súlyfüggvénye.

Hasonlóan a `step` függvényhez, az impulzusválasz numerikusan is megkapható:

```
[wp_impulse_y,wp_impulse_t]=impulse(sysp_tf);
```

Az impulzusválasz

$$w(t) = Be^{s_1 t} + Ce^{s_2 t} + De^{s_3 t} \tag{2.3}$$

alakú, amely az átviteli függvény részlettörtekre való bontásával nyerhető. Az átmeneti függvényhez hasonlóan a tranzienseket itt is a szakasz pólusai okozzák.

A rendszer dinamikájában fontos szerepet játszó pólus-zérus eloszlást a Matlab CST környezetben a

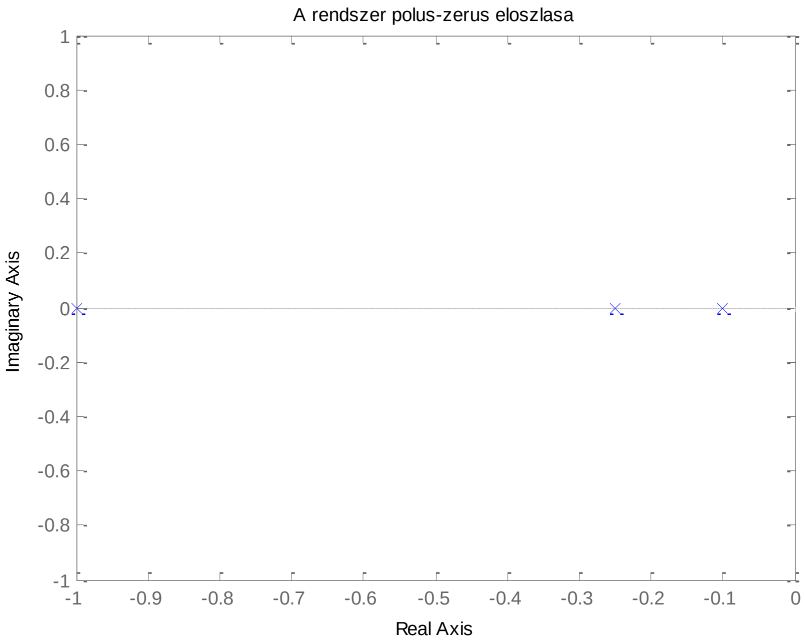
```
pzmap(sysp_tf);
title('A rendszer polus-zerus eloszlasa');
```

vagy numerikusan a

```
[wp_p,wp_z]=pzmap(sysp_tf)
```

parancssor adja, amely a mintarendszer esetében a *2.9. ábrán* látható. A konvenciónak megfelelően a pólusokat x-el, a zérusokat o-val szokás jelölni az *s*-síkon.

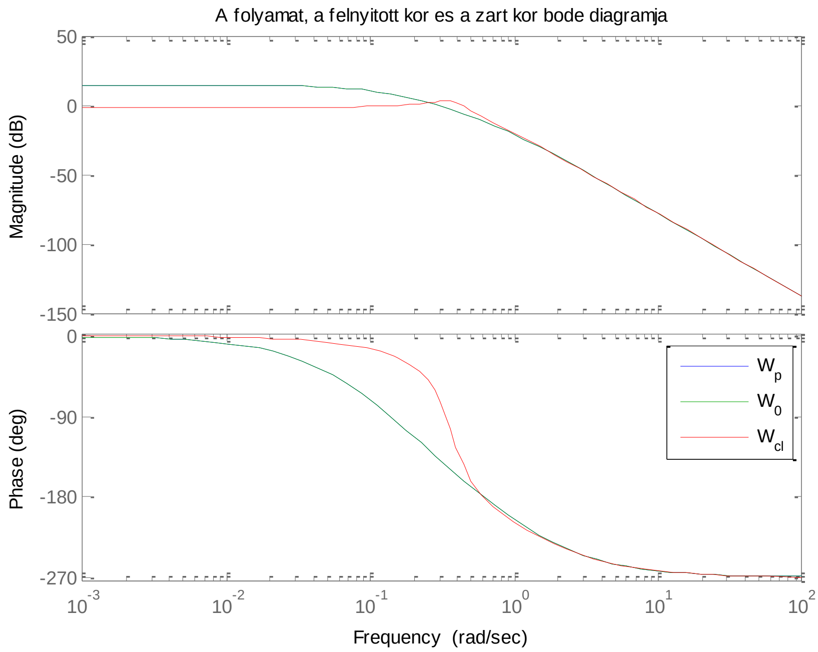
A pólus-zérus eloszlásból látható az a nem meglepő tény, hogy a mintarendszernek nincsen zérusa, a pólusai pedig negatívak, ezért a (2.2) és (2.3) kifejezésekben az átmeneti függvény és az impulzusválasz egy véges konstans értéken stabilizálódik.



2.9. ábra. A szakasz P/Z eloszlása.

A zárt rendszer viselkedése

Hasonlítsuk össze most a *2.5. ábrán* látható visszacsatolt rendszer viselkedését $W_c(s)=1$ mellett a szakasz és a felnyitott kör viselkedésével. A $W_c(s)=1$ választás mellett a felnyitott kör és a szakasz átviteli függvénye megegyezik, azaz $W_p(s)=W_0(s)$. A felnyitott kör és a zárt kör Bode-diagramját a *2.10 ábra* mutatja.



2.10. ábra. A folyamat, a felnyitott kör és a zárt kör Bode-diagramja $W_c(s)=1$ esetén.

Ehhez Matlab környezetben elő kell állítanunk a felnyitott és zárt kör átviteli függvényét is:

```
% a felnyitott kor eloallitasa
sysw0=series(sysp_tf,sysc_tf)
% Egy sima "drotdarab"
sys_drot=tf(1,1);
% A zart rendszer
sys_cl=feedback(sysw0,sys_drot)
%A felnyitott es zart kor bode diagramja
figure(1)
hold on
bode(sysw0)
bode(sys_cl)
hold off;
title('A folyamat, a felnyitott kor es a zart kor
bode diagramja');
legend('W_p','W_0','W_{cl}');
```

A `hold on` és `hold off` közötti rajzolásoknál a Matlab nem törli le az aktuális ábrát, hanem rárajzol az előző ábrára.

Vezessük be a vágási frekvencia fogalmát, amely azt a frekvenciát jelöli, ahol a felnyitott kör amplitúdó-menete metszi a 0 dB-es tengelyt, azaz $|W_0| = 1$. A vágási frekvenciát ω_c -vel jelöljük.
A *2.10 ábra* alapján megfigyelhető, hogy

- $\omega << \omega_c$ esetén $|W_{cl}(j\omega)| \approx 1$ (azaz a zárt kör amplitúdó-menete a 0dB tengelyt követi). Ekkor ugyanis a tipikus $|W_0(j\omega)| >> 1$ esetet feltételezve $\omega << \omega_c$ frekvenciákon:

$$|W_{cl}(j\omega)| = \left| \frac{W_0(j\omega)}{1 + W_0(j\omega)} \right| \approx \frac{|W_0(j\omega)|}{|W_0(j\omega)|} = 1$$

- Az $\omega >> \omega_c$ frekvenciákon $W_0(j\omega) \approx W_{cl}(j\omega)$. (Azaz a felnyitott kör és a zárt kör amplitúdómenete jó közelítéssel megegyezik). Ekkor ugyanis tipikusan $|W_0(j\omega)| << 1$, ezért:

$$|W_{cl}(j\omega)| = \left| \frac{W_0(j\omega)}{1 + W_0(j\omega)} \right| \approx \frac{|W_0(j\omega)|}{1} = |W_0(j\omega)|$$

Hasonló megfontolások alapján (arg a fázisszöget jelöli a matematikában):

- $\omega << \omega_c$ esetén $\arg W_{cl}(j\omega) \approx 0$
- $\omega >> \omega_c$ esetén $\arg W_{cl}(j\omega) \approx \arg W_0(j\omega)$

Mivel az ideális szabályozási kör a $W_{cl}(j\omega) \equiv 1$ átviteli függvényt valósítaná meg, a fenti megállapítások alapján észrevehető, hogy a visszacsatolás hatására a zárt szabályozási kör $\omega < \omega_c$ frekvenciákon (azaz a vágási frekvenciánál kisebb frekvenciákon) jól közelíti az ideális szabályozási kör átvitelét. Ebből levonható az a következtetés is, hogy a szabályozási feladatok legtöbbjében olyan $W_c(s)$ szabályozó tervezése a cél, amely a szabályozás sávszélességét (control bandwidth) adó $(0, \omega_c)$ intervallumot a lehető legnagyobb mértékben növeli az ω_c növelésével. Az ideális szabályozási kör azonban nem valósítható meg, mivel – mint ahogyan azt majd a félév során látjuk – ω_c nem növelhető büntetlenül. Az okok listáján előkelő helyet foglal el a következő két korlátozás:

a) Nem lehetséges végtelen nagy beavatkozó jelek kiadása (pl. egy beavatkozó szervként működő szervo motor nem tud végtelen nyomatékot kiadni és a meghajtott rendszer sem lenne képes ilyen jelet fogadni).
b) Stabilitási problémák merülhetnek fel.

A visszacsatolás miatt a szabályozási kör egyik legfontosabb jellemzője a stabilitás. Tekintsük a következő mérnöki gondolatmenetet (a matematikailag is korrekt igazolás az argumentum elven és az abból következő Nyquist-kritériumon alapul). Ha pl. a felnyitott kör átviteli függvénye egy $\omega_1 > 0$ frekvencián tisztán valós számot vesz fel, és ezen a frekvencián igaz, hogy $W_0\left(j\omega_1\right) \le -1$, akkor a hurkot negatívan zárva, a hurokban összességében 1-nél nagyobb erősítés jelenik meg a ω_1 frekvencián, ami gerjedést, azaz instabilitást okoz (lásd oszcillátorok).

(Megjegyzés: $-1 < W_0(j\omega_1) < 0$ esetben az erősítés egy $q = W_0(j\omega_1)$ hányadosú sornak felel meg, amely egy véges számhoz konvergál, tehát nem okoz stabilitási problémát.)

A $W_0\left(j\omega_1\right) \le -1$ egyenlőtlenséget, azaz instabilitást teljesítő ω_1 akkor fordul elő, ha

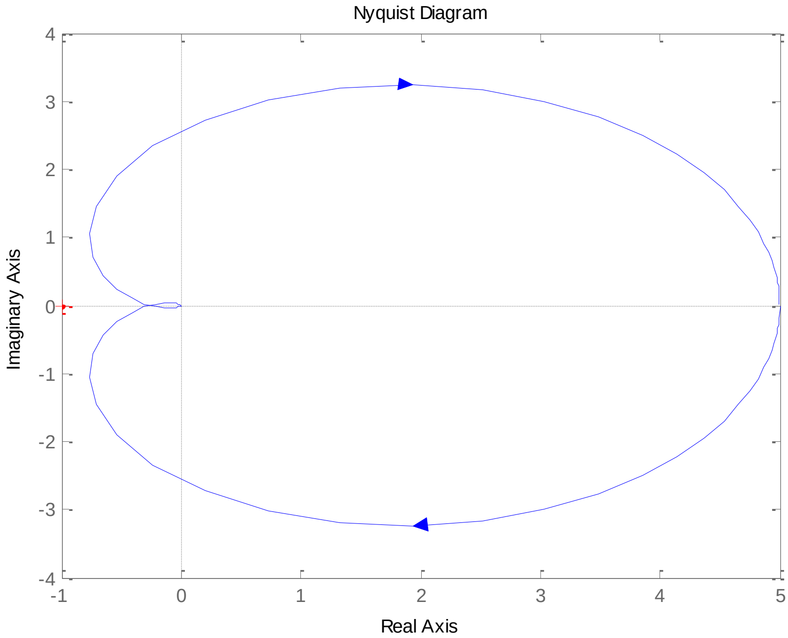
- a felnyitott kör Nyquist diagramja metszi a negatív valós tengelyt a $\left(-\infty,-1\right]$ intervallumban (lásd később Nyquist-féle stabilitási kritérium).
- A Bode-diagramban az ω_c frekvenciához tartozó felnyitott köri fázisszögre teljesül, hogy $\arg W_0(j\omega_c) \le -\pi \Leftrightarrow \pi + \varphi(\omega_c) \le 0$ (lásd Bode-féle stabilitási kritérium később).

Stabilitás esetén ezek nem léphetnek fel!

A Nyquist diagramot a

```
figure(11)
nyquist(sysw0)
```

Matlab függvénnyel kirajzolva a *2.11. ábrát* kapjuk, amelyben a stabilitás szempontjából fontos szerepet játszó $\left(-1,0\right)$ pont piros kereszttel van jelölve.



2.11. ábra. Felnyitott kör Nyquist-diagramja K=1 esetén.

A stabilitás vizsgálatához bevezetjük a φ_t fázistartalék (fázistöbblet) fogalmát is. Definícószerűen

$$\varphi_t = \pi + \varphi(\omega_c) \text{ [rad]},$$

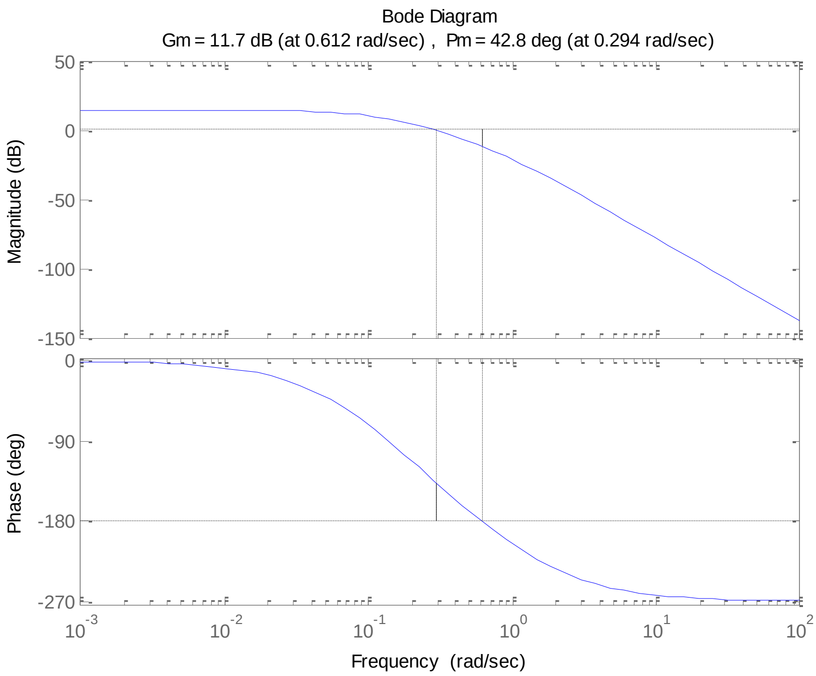
ahol $\varphi(\omega_c)$ a felnyitott kör $W_0(j\omega_c)$ Nyquist-görbéjének fázisszöge a vágási frekvencián (radiánban mérve). Amennyiben a fázisszöget fokban mérjük, akkor természetesen

$$\varphi_t = 180^\circ + \varphi(\omega_c)\ [^\circ]$$

a fázistartalék értelmezése. A stabilitási tulajdonságokat meghatározó ω_c vágási frekvencia és φ_t fázistartalék (phase magin) a Matlab CST `margin` utasításával könnyen meghatározható:

```
figure(10)
margin(sysw0)
```

Ez a függvényhívás a *2.12. ábrát* eredményezi. Az ábrán két frekvencia van megjelölve.
Az egyik az $\omega_c = 0.294$ vágási frekvencia, ahol a φ_t fázistartaléknak az ábrán a $Pm = 42.8$ felel meg (Pm: phase margin). A fázistartalék mértéke a fázisdiagramon az $\omega_c = 0.294$ frekvencián folytonos vonalszakasszal van jelölve.
A korábban ω_1-gyel jelölt frekvencián, ahol a felnyitott kör amplitúdója negatív valós értéket vesz fel, azaz, ahol a fázisszög $-\pi$, az amplitúdó-diagramban jelölt függőleges folytonos vonalszakasz jelzi az ún. erősítéstartalék (Gain margin, Gm) mértékét. Szemléletesen szólva ez azt jelenti, hogy ha a hurokerősítést $Gm = 11.7 dB \approx 3.84$–szeresére növelnénk, akkor a stabilitás határhelyzetére jutnánk.



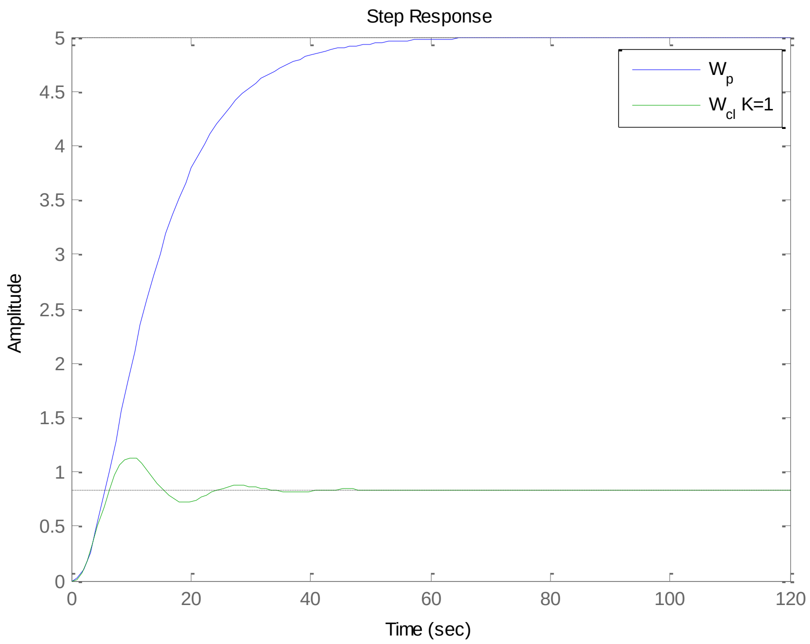
2.12. ábra. Fázistatalék és erősítéstartalék.

A stabilitási kérdéskörrel a félév során később még részletesen fogunk foglalkozni.

A visszacsatolás hatékonyságát egy szabályozási körben jól érzékelteti a zárt rendszer átmeneti függvénye (ugrásválasza). A mintarendszer visszacsatolásával kapott ugrásválaszt a *2.13. ábra* illusztrálja. Ideális szabályozási körben a kimenő jel (a *2.5. ábrán* y) megegyezik a bemenő jellel (a *2.5. ábrán* r). Mivel nagy frekvenciákon $W_{cl}(s)$ jó közelítéssel megegyezik a $W_0(s) \approx W_p(s)$ átviteli függvényekkel, ezért az ugrásválasz felfutási meredeksége zárt körben hasonló a szakasz ugrásválaszának felfutási meredekségével (lásd kezdeti-érték tétel). Azonban a zárt kör

$$W_0(s)+1=0$$

karakterisztikus egyenlete tartalmaz konjugált komplex gyököket (azaz a zárt rendszernek van konjugált komplex póluspárja), ezért a *2.13. ábrán* a zárt rendszer ugrásválaszában lengések jelennek meg.



2.13. ábra. A zárt rendszer átmeneti függvénye K=1 esetén.

A konjugált komplex póluspár jelenléte a zárt körben a nevező gyökeit megadó

```
>> roots(sys_cl.den{1})

ans =

  -1.1361
  -0.1069 + 0.3473i
  -0.1069 - 0.3473i
```

Matlab paranccsal könnyen ellenőrizhető. A zárt rendszer statikus viselkedését befolyásoló kis frekvenciatartományban az amplitúdómenet jó közelítéssel 0dB-nek megfelelő egységnyi erősítésnek felel meg (*2.10. ábra* és *2.12. ábra*), ezért állandósult állapot a kívánt egységszinthez közeli lesz ($1/(1+A)$ maradó hibával).

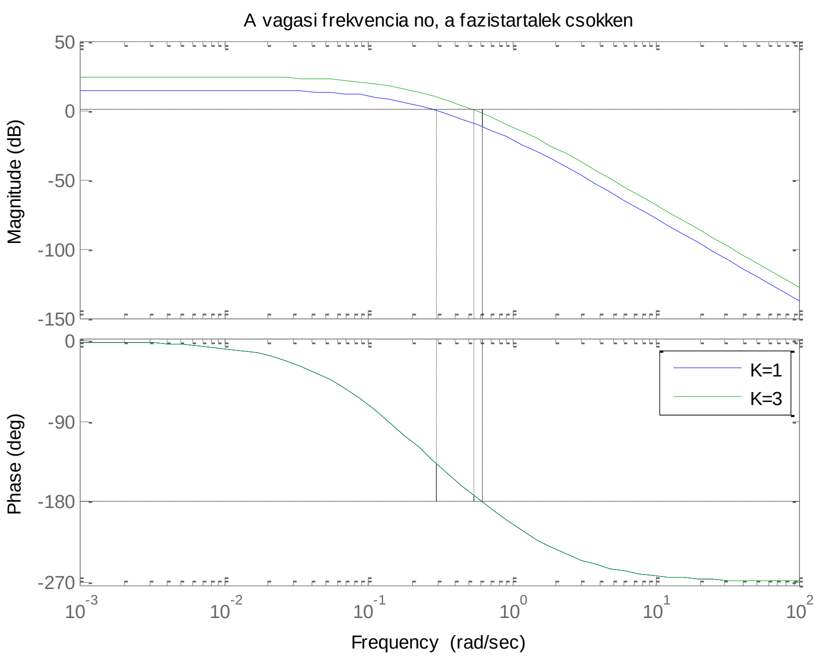
Vizsgáljuk meg most, mi történik akkor, ha a zárt rendszerben a hurokerősítés ($K \cdot A = 5K$) nő. Ennek megfelelően hasonlítsuk össze a $W_c(s) = K = 1$ és a $W_c(s) = K = 3$ esetet. A Matlab környezetben ez a következő utasítással hajtható végre:

```
% 2. Zart rendszer viselkedese P taggal, K=5

%szabalyozo eloallitasa
numcs2=3;
dencs2=1;
sysc2_tf=tf(numcs2,dencs2)
% a felnyitott kor eloallitasa
sysw0_2=series(sysp_tf,sysc2_tf)
% A zart rendszer
sys_cl2=feedback(sysw0_2,sys_drot)
%vagasi frekvencia, fazistobblet
figure(22)
hold on
margin(sysw0)
margin(sysw0_2)
hold off
title('A vagasi frekvencia no, a fazistartalek
csokken')
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)])
pause
clc %parancsablak törlése
%vagasi frekvencia, fazistobblet
figure(23)
hold on
nyquist(sysw0)
nyquist(sysw0_2)
hold off
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)])
pause
clc
%zart kor atmeneti fuggvenye
figure(24)
hold on
step(sysp_tf);
step(sys_cl);
step(sys_cl2);
legend('W_p','W_{cl} K=1',['W_{cl},
K=',num2str(numcs2)])
```

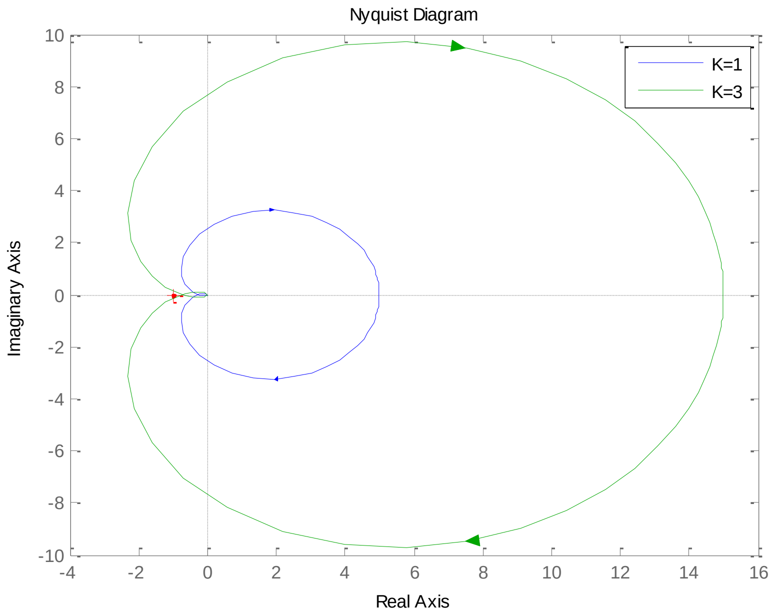
```
hold off;
pause
clc
```

A $W_c(s)=3$ tagot tartalmazó rendszerben a $W_c(s)$ tag átviteli függvényét a `sysc2_tf` változó realizálja, míg a felnyitott szabályozási kört `sysw0_2`, a zárt szabályozási kört pedig `sys_cl2` reprezentálja.

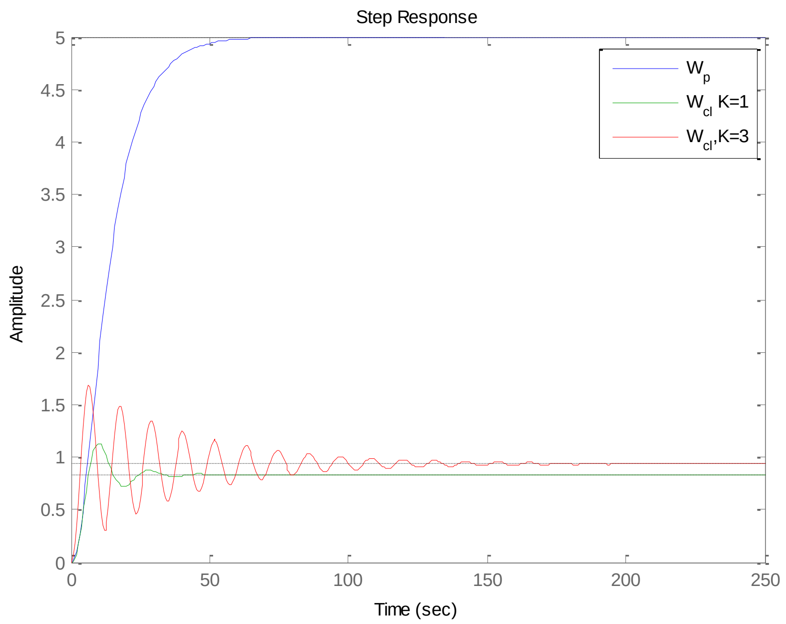
A különböző $W_c(s)$ tagokkal megvalósított szabályozási rendszerek felnyitott körének Bode-diagramját a *2.14. ábra*, míg a Nyquist-diagramját a *2.15. ábra* mutatja. Világos (komplex számot valós skalárral szorzunk), hogy a hurokerősítés növelése a fázismenetet nem befolyásolja, azonban az amplitúdó-menet felfelé tolódik. (Ezzel párhuzamosan a Nyquist-diagram „felfújódik”.)



2.14. ábra. Felnyitott kör Bode-diagramja K=1 és K=3 esetén.



2.15. ábra. Felnyitott kör Nyquist-diagramja K=1 és K=3 esetén.

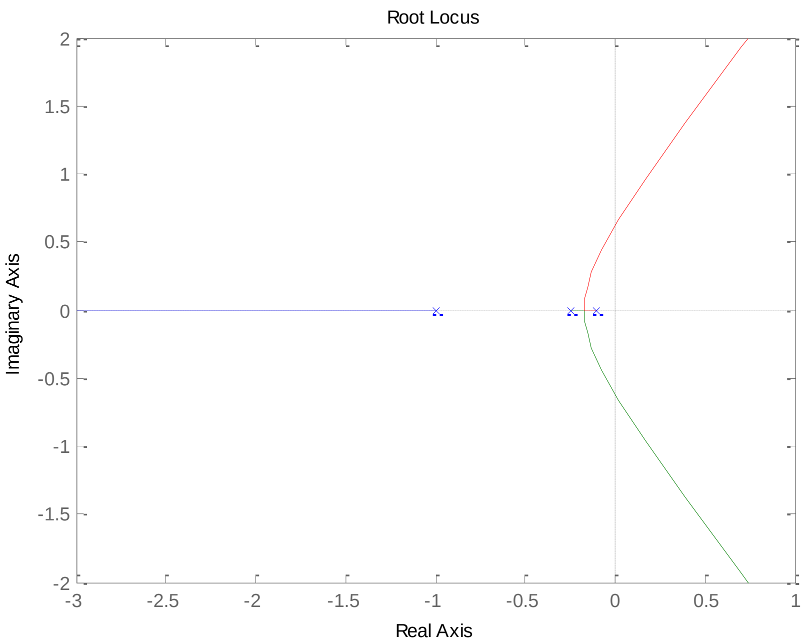


2.16. ábra. Zárt rendszer átmeneti függvénye K=1 és K=3 esetén.

Ennek következtében az

- ω_c vágási frekvencia megnő és
- az $\omega < \omega_c$ tartományban a $|W_0(j\omega_c)|$ erősítés nő.

Ezért a zárt rendszer amplitúdó-menete jobban fogja közelíteni az ideálisnak tekintett 0dB-es értéket. A vágási frekvencia megnövekedése a *2.16. ábrán* illusztrált zárt rendszer átmeneti függvényeken (ugrásválaszokon) is jól látható, mivel nagyobb frekvenciakomponenseket tud a zárt rendszer egységnyi erősítéssel átvinni, aminek következtében a tranziens felfutási ideje lecsökken. Vegyük észre azonban, hogy a hurokerősítés növelésével a fázistartalék szinte nullára, az erősítéstartalék pedig 1-re csökkent, aminek következtében nagy lengések kezdenek kialakulni a zárt körben. Ezt igazolja az átmeneti függvényeket mutató *2.16. ábra* is. Az erősítés további növekedése csillapítatlan, majd egyre növekvő lengéseket okozna, ami a zárt rendszer gerjedéséhez vezet.
A lengéseket okozó tranziensek egzakt vizsgálatához a zárt rendszer pólusainak komplex síkon való vándorlását érdemes megfigyelni, ugyanis ezek határozzák meg a tranzienseket. A Matlab CST környezetben egy $W_0(s)$ felnyitott körrel rendelkező visszacsatolt rendszer pólusainak és zérusainak mozgását a körerősítés függvényében az `rlocus` Matlab függvénnyel vizsgálhatjuk:

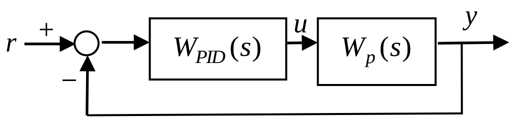


2.17. ábra. Gyökhelygörbe $K=1$ esetén.

```
%A felnyitott kor gyokhelygorbeje
figure(25)
rlocus(sysw0)
```

Az eredményül adódó gyökhelygörbét a *2.17. ábra* mutatja. Megfigyelhető, hogy az eredetileg három negatív pólus közül a körerősítés növelése mellett a leggyorsabb (legnegatívabb) pólus tart a $-\infty$ felé (ezért a dinamikába nem fog beleszólni) a másik két pólus viszont egymás felé vándorol, amíg egy kétszeres multiplicitású negatív valós pólussá nem alakulnak (ekkor még elég gyors a tranziens és még nincs lengés sem). Ezután a körerősítés további növelésével a kétszeres multiplicitású pólus egy kéttárolós lengő taggá alakul, konjugált komplex póluspár keletkezik, amelynek hatására a tranziensben növekvő frekvenciájú lengések jelennek meg, az átmeneti függvényben megjelenő burkológörbe pedig egyre később cseng le. Amint a gyökhelygörbe átlépi a képzetes tengelyt és a konjugált komplex póluspár a pozitív félsíkra kerül, a tranziensben megjelenő lengések exponenciális burkológörbéje monoton nő, a rendszer begerjed. Látható tehát, hogy a felnyitott kör körerősítésének növelése csak egy határ eléréséig ad elfogadható eredményt.

A legtöbb esetben a $W_c(s)$ szabályozó valamilyen dinamikával rendelkezik, azaz az erősítés (és fázistolás) a frekvenciától függ. Legyen adott egy PID szabályozót magában foglaló szabályozási kör (*2.18. ábra*), amelynek tervezési kérdéseivel majd a jövőben foglalkozunk.



2.18. ábra. A mintarendszer PID szabályozóval.

A PID szabályozó átviteli függvénye és paraméterei legyenek a következők:

$$W_{PID}(s) = A_p\left(1+\frac{1}{sT_i}+\frac{sT_d}{1+sT}\right) \qquad \begin{aligned} A_p &= 1.7666 \\ T_i &= 13.4756 \\ T_D &= 2.4439 \\ T &= 0.5244 \end{aligned}$$

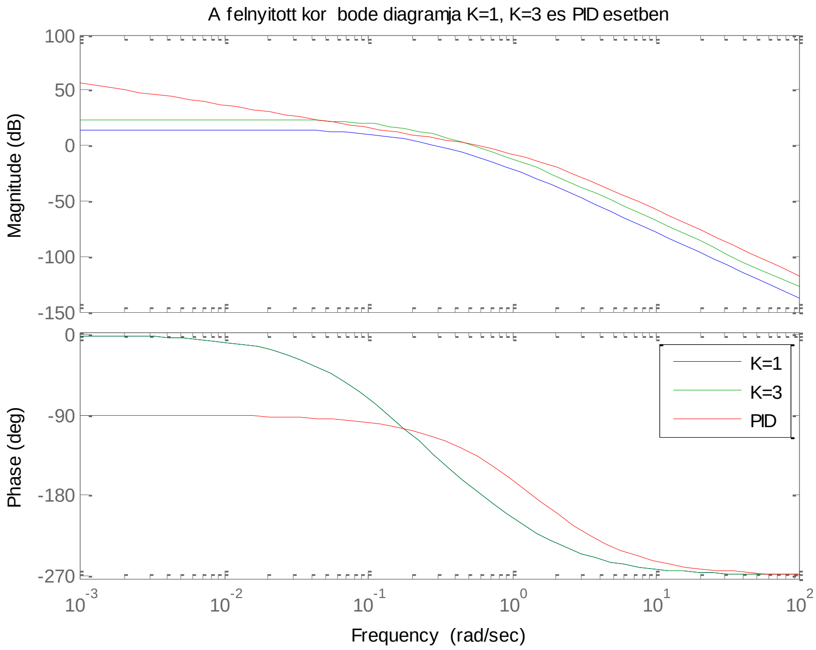
A PID szabályozót a korábbi visszacsatolásokkal összehasonlító Matlab CST kód a következő:

```
% 3. Zart rendszer viselkedese PID taggal
%szabalyozo eloallitasa
Ap=1.7666; Ti=13.4756; Td=2.4439; T=0.5244;
numcs3=Ap/Ti*[Ti*(Td+T) Ti+T 1];
dencs3=[T 1 0];
sysc3_tf=tf(numcs3,dencs3)
```

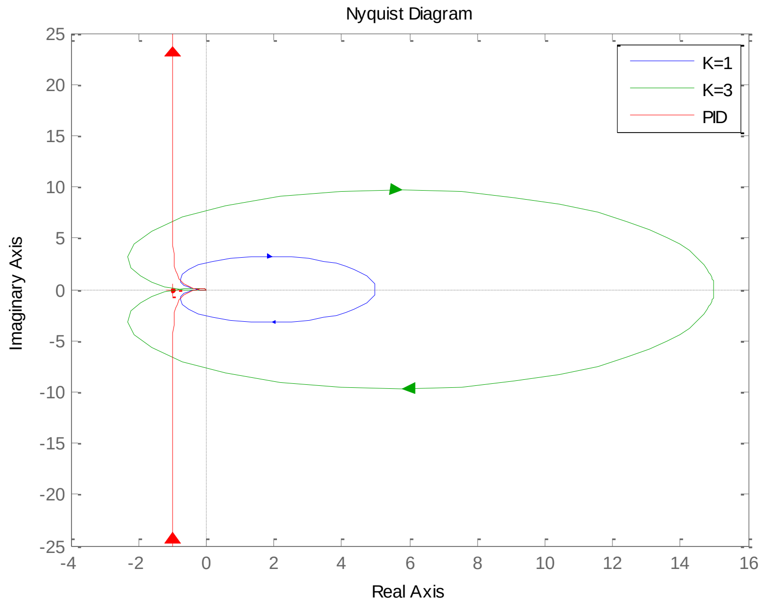
```
% a felnyitott kor eloallitasa
sysw0_3=series(sysp_tf,sysc3_tf)
% A zart rendszer
sys_cl3=feedback(sysw0_3,sys_drot)
%A felnyitott  kor bode diagramja K=1 es K=5
%es PID eseten
figure(31)
hold on
bode(sysw0)
bode(sysw0_2)
bode(sysw0_3)
hold off
title(['A felnyitott kor  bode diagramja K=1,…
     K=',num2str(numcs2),'es PID esetben'])
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)], 'PID')
pause
clc
%vagasi frekvencia, fazistobblet
figure(32)
hold on
margin(sysw0)
margin(sysw0_2)
margin(sysw0_3)
hold off
title('A vagasi frekvencia no, a fazistartalek …
     csokken')
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)],'PID')
pause
clc
%vagasi frekvencia, fazistobblet
figure(33)
hold on
nyquist(sysw0)
nyquist(sysw0_2)
nyquist(sysw0_3)
hold off
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)],'PID')
pause
clc
%zart kor atmeneti fuggvenye
figure(34)
hold on
step(sysp_tf);
step(sys_cl);
step(sys_cl2);
step(sys_cl3);
hold off;
legend('W_p','W_{cl} K=1',['W_{cl}, …
     K=',num2str(numcs2)],'PID')
pause
```

```
clc
%A felnyitott kor gyokhelygorbeje PID-nel
figure(35)
rlocus(sysw0_3)
pause
clc
```

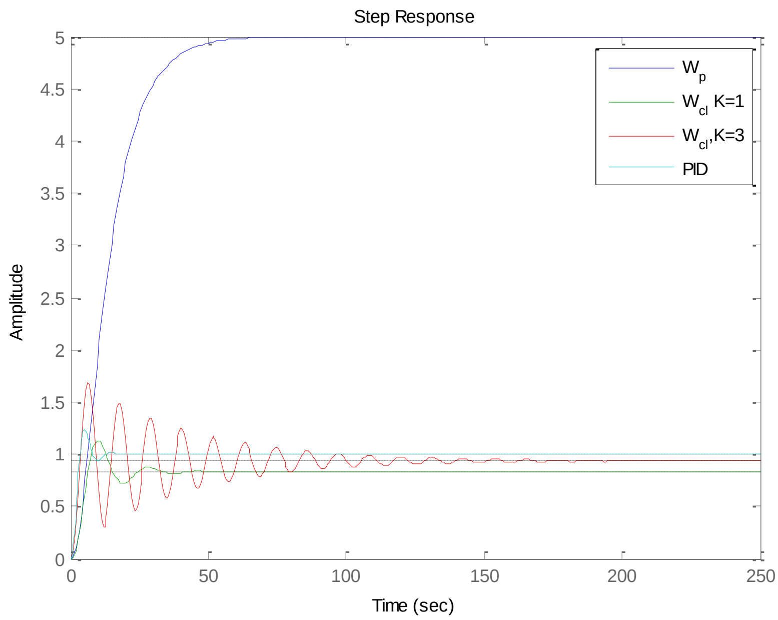
A PID szabályozó a korábbi visszacsatolásokkal a *2.19-2.22.* ábrák alapján hasonlítható össze. Megállapíthatjuk, hogy a statikus körerősítéssel szemben a dinamikus szabályozó segítségével lehetséges a vágási frekvenciát úgy növelni, hogy közben a fázistartalék nem hogy csökkenne, hanem nő. A szabályozó ezen kívül még képes a kisfrekvenciás erősítés további növelésére (*2.19. ábra* amplitúdó-diagram), ami a maradó hiba eltűnésében (*2.21. ábra*) alapvető fontosságú (lásd szabályozótervezés a jövőben). A gyökhelygörbében (*2.22. ábra*) fontos új jelenség, hogy a szabályozó zérusokat is tartalmaz. Figyeljük meg, hogy egyes pólusok és zérusok megegyeznek, ezzel egymás hatását kioltják (pólus-zérus kiejtés).



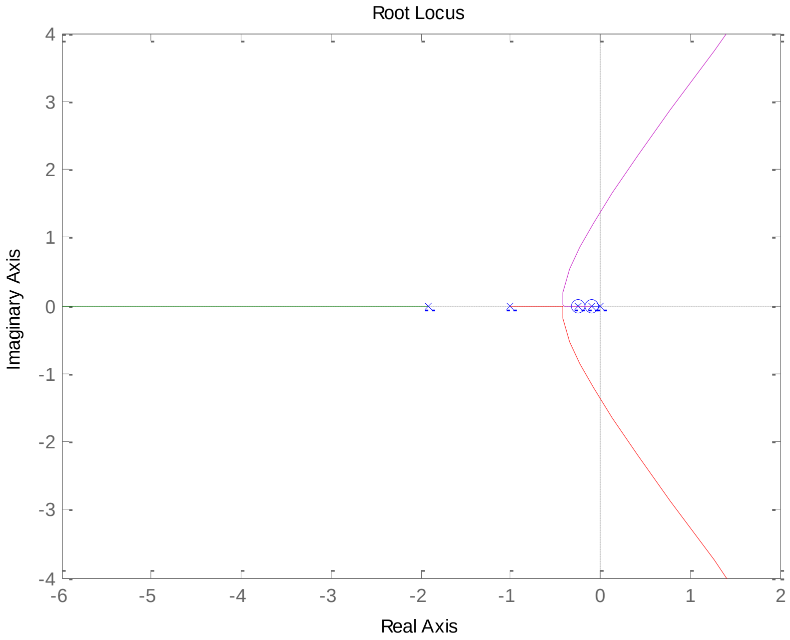
2.19. ábra. Felnyitott kör Bode-diagramja K=1, K=3 és PID szabályozó esetén



2.20. ábra. Felnyitott kör Nyquist-diagramja K=1, K=3 és PID szabályozó esetén



2.21. ábra. Zárt rendszer átmeneti függvénye K=1, K=3 és PID szabályozó esetén



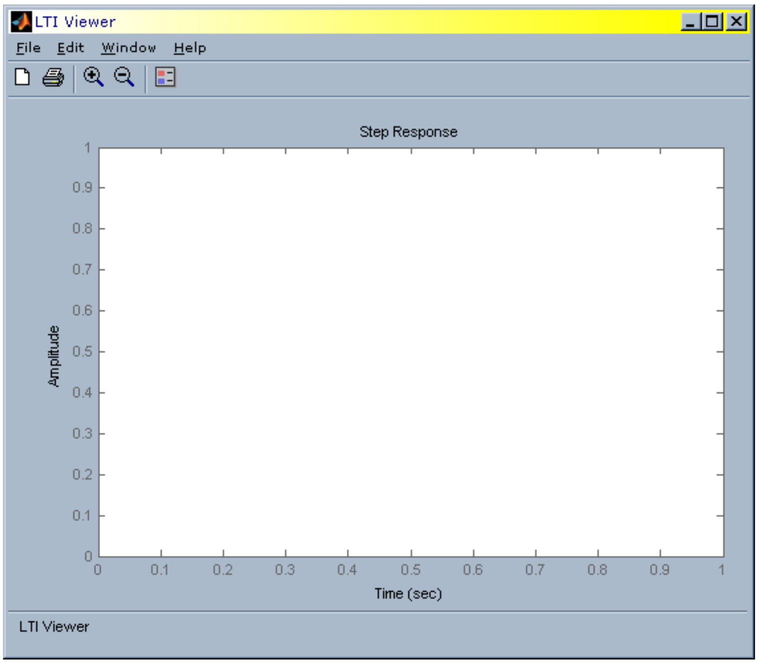
2.22. ábra. Gyökhelygörbe PID szabályozás esetén.

Az LTI Viewer

A Matlab Control System Toolboxának LTI Viewer felhasználóbarát szolgáltatása lehetőséget nyújt dinamikus rendszerek komplex analízisére. A szolgáltatás az

```
>> ltiview
```

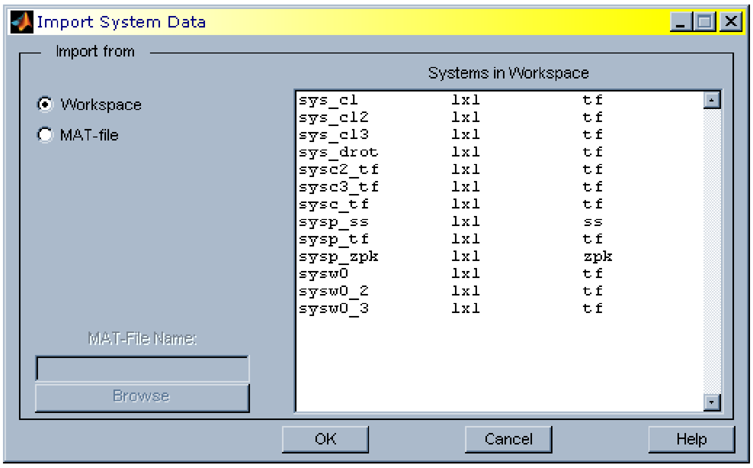
hívással indítható. Ekkor megjelenik a *2.23. ábrán* található kezelő felület.



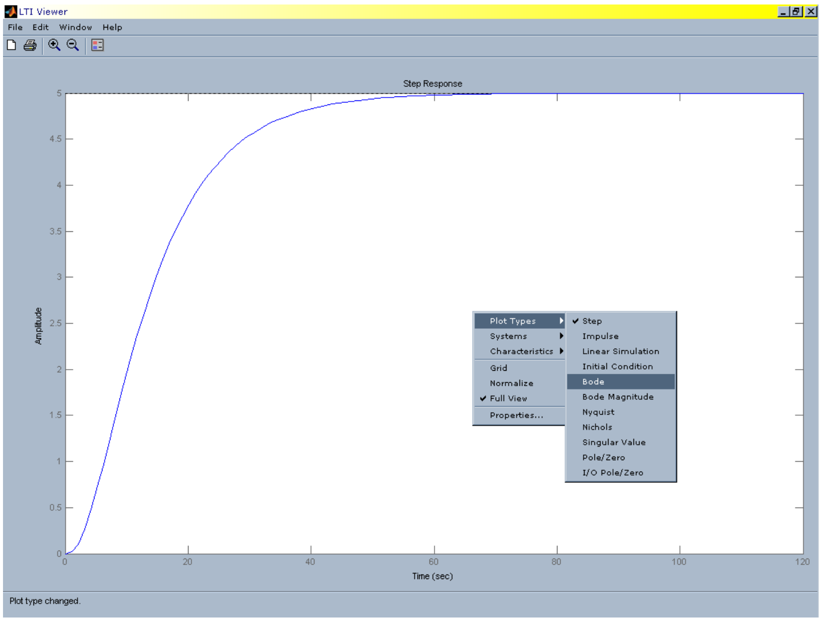
2.23. ábra. LTI Viewer kezelői felülete

A `File/import…` paranccsal a munkatérből (workspace) illetve `mat` fájlból importálhatjuk a vizsgálni kívánt dinamikus rendszert (*2.24. ábra*). Az eddig használt rendszerek közül pl. válasszuk ki a `sysw0` felnyitott kört reprezentáló rendszert. A főablakban rögtön megjelenik a rendszer ugrásválasza. Menjünk a kurzorral az ábra területre, majd a jobb klikk után a Plot Types menüből kiválaszthatjuk, hogy milyen jellemzőjét szeretnénk látni a lineáris rendszernek (*2.25. ábra*). A 'Linear Simulation' tool lehetőséget biztosít a rendszer szimulálására általunk specifikált bemenet esetén (ez a Matlab `lsim` parancsának felel meg). Minden egyes toolhoz megtekinthetjük a fontos jellemzőket az ábra területére való jobb klikk után a 'Characteristics' menüből. Pl. átmeneti függvény (step response) esetén megnézhetjük a felfutási időt (rise time), az állandósult értéket (steady state) vagy a Plot Types/Bode esetén megtekinthetjük az erősítési- és fázistartalékot.

Az `ltiview` felületen könnyen hasonlíthatók össze két rendszer tulajdonságai is. Ehhez nem kell mást tenni, mint beimportálni további rendszer(eke)t is, majd a jobb klikk/Systems helyen aktiválni azokat, amelyeket össze szeretnénk hasonlítani. Az `ltiview Edit` menüjében lehetőség nyílik a megjelenítés beállításainak módosítására is (szín, vonalvastagság, vonaltípus, stb.)



2.24. ábra. Dinamikus rendszer importálása



2.25. ábra. Rendszerjellemző kiválasztása

Esettanulmány: Szatellit orientáció szabályozási kör analízise

A következőkben a szatellit rendszer példáján mutatjuk be a szabályozási rendszer analízisét. A szatellit feladata, hogy a föld körüli orbitális pályán mindig egy adott pont (pl. csillag) felé irányítsa az érzékelőket tartalmazó egységet, azaz egy adott orientációt tartson meg az érzékelő egység. Az érzékelő egység a lehető legnagyobb mértékben izolálva van a szatellit központi és egyéb egységeitől (pl. tápellátás egység) mechanikai vibrációk és elektromos zajok elkerülése érdekében. A környezeti hatásokat (napnyomás, mikrometeorok, orbitális pálya perturbációja) elhanyagoljuk. A szabályozás akkor válik szükségessé, amikor a szatellitet (illetve annak érzékelő egységét) egy másik pont felé kell irányítani. Előírt követelmény, hogy az új irányt 20 sec alatt 1%-os pontossággal kell felvenni és a tranziensből adódó túllövés ne legyen nagyobb 15%-nál. Mivel a szatellit paraméterei változhatnak, a specifikációkat egy előre megadott paramétertartomány minden értékére teljesíteni kell (robusztusság).

Nézzük most meg, hogy a zárt körben $T_{1\%} = 20\,\mathrm{s}$ szabályozási idő és $\Delta\nu = 0.15$ megengedett túllövés specifikációk milyen felnyitott köri specifikációknak felelnek meg (a szabályozótervezés gyakran felnyitott körben történik). A $\Delta\nu = 0.15$ (15%) túllövés

$$\Delta\nu = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 0.15 \Rightarrow \xi \approx 0.5$$

csillapítású lengő tagnak felel meg, amely a $T_{1\%} = 20\,\mathrm{s}$ beállási idő miatt

$$0.01 = \exp(-\xi\omega_0 t_s) = \exp(-0.5\omega_0 20) \Rightarrow \omega_0 \approx 0.5\,\mathrm{rad/s}$$

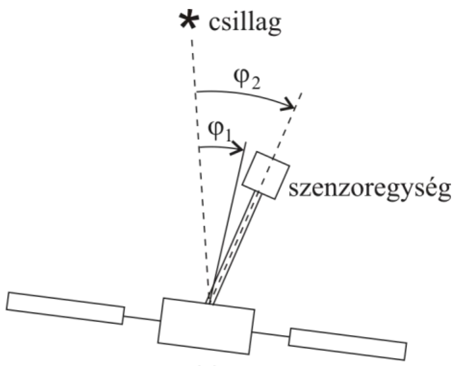
csillapítatlan frekvenciával rendelkezik. A kívánt zárt köri viselkedést realizáló $\omega_0 = 0.5$, $\xi = 0.5$ paraméterű kéttárolós lengő tag a felnyitott körben $\omega_c \cong 0.5\,\mathrm{rad/s}$ vágási frekvenciának és $\varphi_t = 50°$ fázistöbbletnek felel meg.

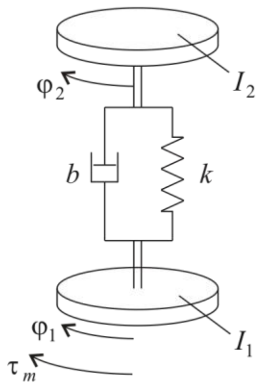
2.4.1. A szatellit modellje

A szatellit vázlatos felépítése és fizikai modellje a *2.26. ábrán* látható.

A *2.26. (a) ábrán* látható vázlatos felépítésben θ_2 szög jelöli a referenciapont (pl. csillag) felé mutató irány és az érzékelő egység iránya közötti szöget (ez a szabályozott jellemző). A θ_1 szög jelöli a referenciapont felé mutató irány és a szatellit központi egységének irányultsága közötti szöget.

A rendszer mechanikai modellje a 2.26 (b) ábrán látható, ahol az érzékelő egység és a szatellit teste (központi egység) egy-egy diszkkel (körlemezzel) van modellezve.





2.26. ábra. A szatellit vázlatos felépítése és fizikai modellje

A referencia pont és a szatellit test közötti φ_1 szög egy τ_m nyomatékot kiadó hajtóművel változtatható. A mechanikai modell egy két tömeget tartalmazó rendszer, amelyek egy k rugóállandójú és egy b viszkózus csillapítási tényezővel rendelkező taggal vannak csatolva. A lineáris modellt leíró differenciálegyenlet a forgó mozgás törvényéből vezethetjük le:

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi}_1 + b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + k(\varphi_1 - \varphi_2) &= \tau_m \\ J_2\ddot{\varphi}_2 + b(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + k(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$J_1 = 1$ és $J_2 = 0.1$ a központi test és az érzékelő egység tehetetlenségi (inercia) nyomatéka. Minden adat SI egységekben értendő. Fizikai analízissel kimutatható, hogy a k és b paraméterek a hőmérséklet fluktuáció hatására a

$$0.09 \le k \le 0.4$$
$$0.038\sqrt{\frac{k}{10}} \le b \le 0.2\sqrt{\frac{k}{10}} \qquad (2.5)$$

tartományban változnak. A modellből, következik, hogy a rendszer kimenete és bemenete $y = \varphi_2$, $u = \tau_m$, ami alapján az átviteli függvény

$$W(s) = \frac{10bs + 10k}{s^2\left(s^2 + 11bs + 11k\right)} \qquad (2.6)$$

alakban határozható meg. A $W(s)$ átviteli függvény (2.4) Laplace-transzformálásával kapott egyenletrendszerből vezethető le, kihasználva, hogy $L(\dot{y}) = sL(y)$ és $L(\ddot{y}) = s^2L(y)$ nulla kezdeti feltétel esetén. A továbbiakban a (2.6) átviteli függvényhez a k és b paramétereket a (2.5) tartományból választjuk a nominális modellhez a

$$k = 0.091$$
$$b = 0.0036$$

értékekkel. Így keletkező nominális szakasz modell átviteli függvénye:

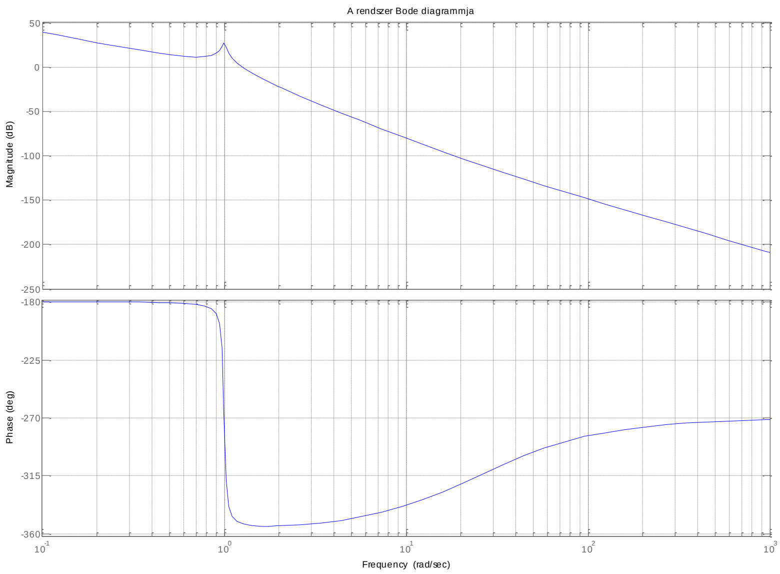
$$W(s) = \frac{0.36(s + 25)}{s^2(s2 + 0.04s + 1)} \qquad (2.7)$$

A szakasz zérus helye: $z_1 = -25$ és pólusai: $p_{1,2} = 0$, $p_{3,4} = -0.02 \pm 0.9998j$.

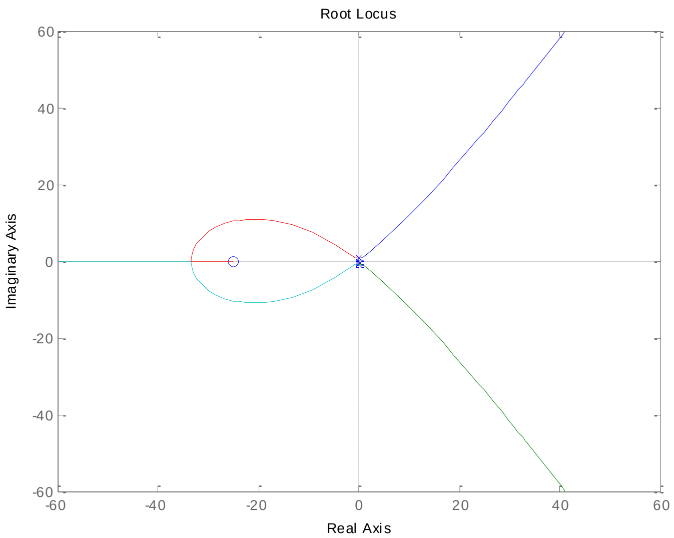
2.4.2. P szabályozó

A szakasz és a felnyitott kör Bode-diagramja $W_c(s) = K = 1$ P-szabályozó és ú.n. egységnyi merev visszacsatolás mellett a 2.27. ábrán látható. A kettős integrátor miatt a szakasz átmeneti függvénye nem állandósul (*t*-vel négyzetesen nő, nincs végértéke). A felnyitott kör Bode-diagramjában a fázistartalék negatív, ami zárt rendszer instabilitását mutatja. Ezen kívül $\omega = 1$ helyen rezonancia frekvencia van, ami az amplitúdó-menetben egy kiemelést (rezonanciát) okoz. A rezonancia frekvenciát a $p_{3,4} = -0.02 \pm 0.9998j$ gyengén csillapított lengő tag okozza. Figyeljük meg azt is, hogy a kettős integrátor miatt a frekvenciát csökkentve az $\omega < 1$ tartományban az amplitúdó 40dB/dekád meredekséggel nő, és a felnyitott kör fázisa az $\omega < 1$ tartományban közel $-180°$ (a lengő tag és a zérus ekkor még nem szól bele a fázismenetbe). A zérusnak ugyan fázisjavító hatása van ($\omega = 25$-nél

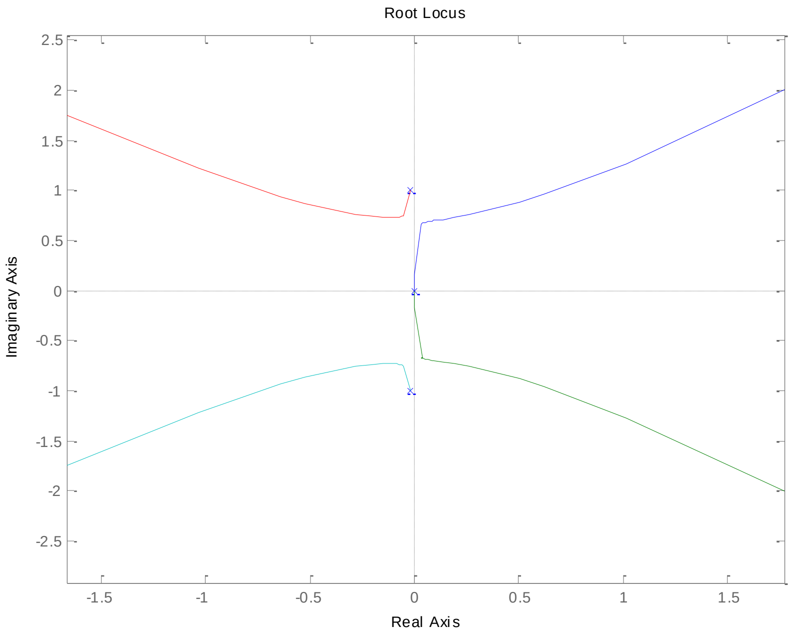
$+45°$, $\omega > 100$ esetén pedig közel $+90°$, de a kéttárolós lengő tag újabb $-180°$ -os fázisrontása már jóval korábban ($\omega = \omega_0 = 1$ környezetében) jelentkezik, aminek hatására a felnyitott kör fázisa nagyobb frekvenciákon sem emelkedik $-270°$ fölé. Ez azt jelenti hogy a felnyitott körben még kis körerősítés mellett sem tudunk pozitív fázistartalékot biztosítani, azaz a rendszer struktúrálisan labilis (instabil). Ezt alátámasztja a *2.28.* és kinagyítva a *2.29. ábrán* látható gyökhelygörbe is. Látható, hogy minden frekvencián van a jobb oldali félsíkon pólusa a zárt rendszernek. Vagyis a hurokerősítés változtatásával a rendszer nem stabilizálható és nem ad a specifikációnak megfelelő szabályozást.



2.27. ábra. A szatellit Bode-diagramja (megegyezik a felnyitott kör Bode-diagramjával $W_c(s) = 1$ mellett)



2.28. ábra. Szatellit orientáció szabályozás gyökhelygörbéje $W_c(s) = 1$ esetén.



2.29. ábra. Szatellit orientáció szabályozás kinagyított gyökhelygörbéje $W_c(s) = 1$ esetén.

2.4.3. PD szabályozó

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor dinamikával rendelkező szabályozó van a zárt rendszerben, amelynek átviteli függvénye

$$W_c(s) = W_{PD}(s) = 0.001(30s+1) \tag{2.8}$$

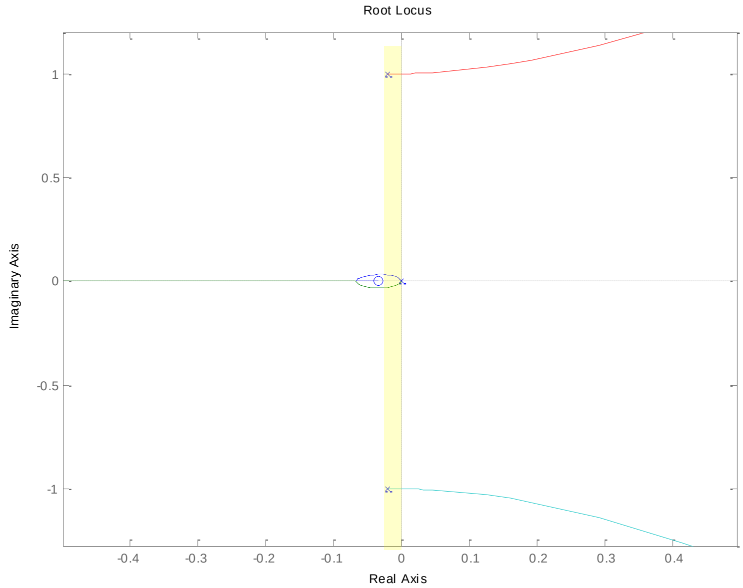
Megjegyzés: A fenti szabályozó egy ideális PD tag, aminek nincsen pólusa (egyelőre söpörjük szőnyeg alá az ilyen szabályozók realizálhatósági kérdéseit). A felnyitott kör gyökhelygörbéjét előállítva a

```
numps=0.036*[1 25];
denps=[1 0.04 1 0 0];
sysp_tf=tf(numps,denps)
numcs2=0.001*[30 1];
dencs2=1;
sysc2_tf=tf(numcs2,dencs2);
% a felnyitott kor eloallitasa
sysw0_2=series(sysp_tf,sysc2_tf)
% A zart rendszer
sys_cl2=feedback(sysw0_2,sys_drot)
figure(25)
rlocus(sysw0_2)
```

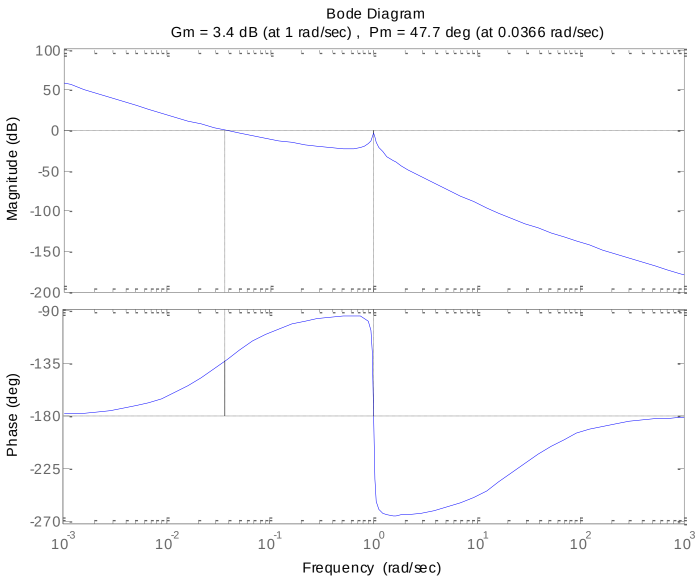
Matlab CST kóddal, a kinagyított gyökhelygörbe a *2.30. ábrán* látható. A korábbi, *2.29. ábrán* látható gyökhelygörbével összehasonlítva észrevehető egy lényeges különbség: a két integrátornak megfelelő pólus az origótól most a bal félsíkon távolodik, míg a gyengén csillapított lengő tagot megvalósító $p_{3,4} = -0.02 \pm 0.9998j$ pólusok fokozatosan a jobboldali félsíkra mennek át, és ezen távolodva kerülnek egyre messzebb az origótól.

Ez a változás új helyzetet teremt, ugyanis láthatóan létezik egy megfelelően kis erősítés tartomány, amelyen belül a zárt kör minden pólusa a bal oldali félsíkon van (valahol a sárga téglalapban), azaz a szabályozási kör stabil.

A *2.31. ábrán* bemutatott Bode-diagramból leolvashatóan a specifikációnak megfelelő 50°-os fázistöbblet megvalósítható. Mindezt az teszi lehetővé, hogy a $W_{PD}(s)$ egy lassú zérust hoz be a felnyitott körbe, ami alacsony frekvenciákon még azelőtt megnöveli a fázisszöget, mielőtt a kéttárolós lengőtag $\omega = 1$ környékén drasztikusan (-180°-kal) elrontaná. Vegyük észre, hogy a szabályozó statikus erősítését megnövelve a zárt rendszer pólusai átkerülnek a jobb oldali félsíkra és a zárt rendszer instabillá válik.



2.30. ábra. Szatellit orientáció szabályozás kinagyított gyökhelygörbéje $W_{PD}(s)$ esetén.



2.31. ábra. Szatellit orientáció szabályozás felnyitott körének Bode-diagramja $W_{PD}(s)$ esetén.

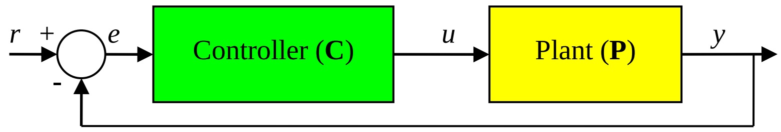
Ez a Bode-diagramban úgy jelenik meg, hogy az amplitúdómenetet felfelé tolva a vágási frekvencia közelít a rezonancia frekvenciához ($\omega = 1$), és amint azt eléri, a fázistartalék lecsökken nullára. Az erősítés további növelése a fázistartalékot a negatív tartományba kényszeríti (ekkor lépnek át a gyengén csillapított lengő tag pólusai a jobboldali félsíkra a gyökhelygörbén).

2. Számítógéptermi gyakorlat – Szabályozási kör analízise

A 2. Számítógéptermi gyakorlat célja szabályozási körök analízise a Matlab és a Control System Toolbox (CST) szolgáltatásainak felhasználásával.

Szabályzási kör

Tekintsük az alábbi hatásvázlatot, amelyen egy egyszerűsített szabályzási kör látható.



A szakasz (Plant) átviteli függvényét $W_p(s)$-vel, a szabályozó (Controller) átviteli függvényét pedig $W_c(s)$-sel jelöljük. A felnyitott kör átviteli függvénye $W_o(s) = W_c(s)W_p(s)$, tekintettel arra, hogy a sorba kapcsolt tagok eredő átviteli függvénye az átviteli függvények szorzata. A zárt körben a bemenet-kimenet párok közötti eredő átviteli függvények

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W_o(s)}{1+W_o(s)} \qquad \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{W_c(s)}{1+W_o(s)} \qquad \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+W_o(s)}$$

Mivel a nevezők megegyeznek, mindhárom átviteli függvény pólusai azonosak. A felnyitott kör átviteli függvényének általános alakja

$$W_o(s) = \frac{K}{s^i} \cdot \frac{\prod(1+s\tau_i)\prod(1+2\mu_i\tau_i s+\tau_i^2 s^2)}{\prod(1+sT_i)\prod(1+2\xi_i T_i s+T_i^2 s^2)} = \frac{K}{s^i} \cdot W_{01}(s),$$

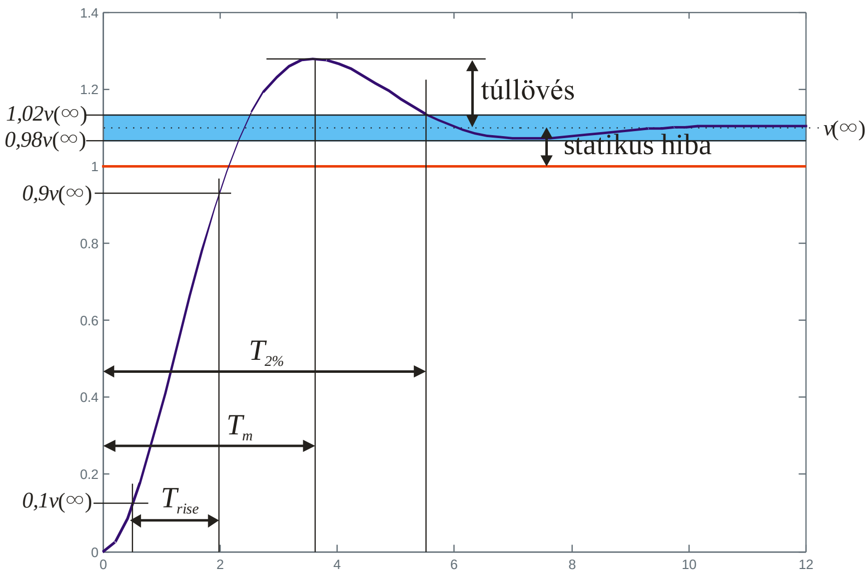
ahol $W_{01}(0) = 1$, K a felnyitott kör körerősítése és i a típusszáma.

A szabályozási kör ugrásválasza

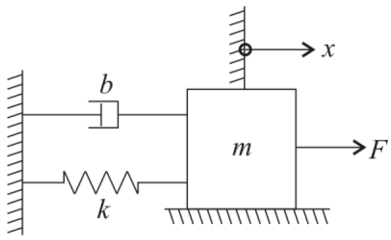
A zárt szabályozási kör ugrásválaszáról (a $v(t)$ átmenti függvényről) leolvashatók a szabályozási kör időtartománybeli jellemzői, amelyeket az ábra segítségével definiálunk. Általános elvárás, hogy a szabályozott jellemző $y(t)$ időfüggvénye minél pontosabban kövesse az alapjel $r(t)$ időfüggvényét.

Jellemző	**Magyarázat**
Végérték	$v(\infty)$ az ugrásválasz végértéke
Statikus hiba	Az ugrásválasz végértékének előjeles távolsága a bemenetre adott egységugrás végértékétől, azaz 1-től: $e(\infty) = 1 - v(\infty)$

Túllövés	$\Delta v = \dfrac{v(T_m) - v(\infty)}{v(\infty)}$ (százalékban is megadható), ahol T_m az ugrásválasz első maximumához tartozó idő.
Felfutási idő	T_{rise}, a $0{,}1v(\infty)$ és a $0{,}9v(\infty)$ értékek felvétele között eltelt idő.
2%-os szabályozási idő	A végérték körüli $0{,}04v(\infty)$ szélességű sávba történő belépéshez szükséges idő.



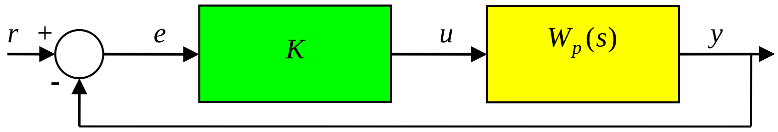
Most tekintsük a korábban már megismert egyszerű lengőrendszert, mint szakaszt.



Az F erő és az x kilengés közötti átviteli függvény korábban már meghatározásra került:

$$W(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{k}s + \frac{m}{k}s^2},$$

ahol $m = 2\,\text{kg}$ a tömeg, $k = 0.5\,\text{N/m}$ a rugó keménysége és $b = 0.25\,\text{Ns/m}$ a csillapítás. Zárt körben a tömeg pozíciójára előírt alapjel követését várjuk el. Alkalmazzunk egy ún. arányos szabályozót, amely a pozícióhiba *K*-szorosával avatkozik be. Határozzuk meg *K*=1 esetére a zárt kör ugrásválaszához tartozó jellemzőket.



A feladat megoldásához a Matlabban rendelkezésre álló LTI Viewer (böngésző) eszközt használjuk. Ennek elindítása a `ltiview` paranccsal vagy Matlab `Start/Toolboxes/LTI Viewer` menüparancs segítségével lehetséges.

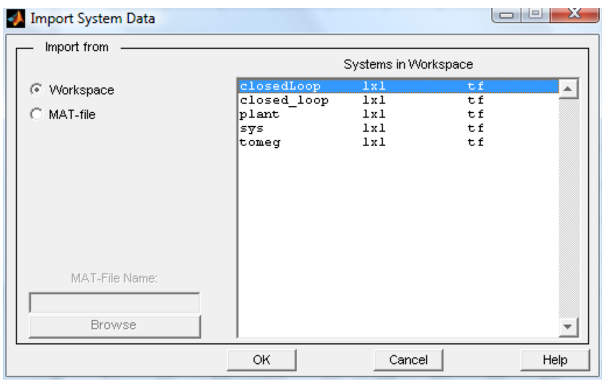
Hozzuk létre a munkatérben (workspace) a szakasz átviteli függvényét `tf` típusú struktúraként.

```
>> plant = tf(1,[2 0.25 0.5])

Transfer function:
         1
--------------------
2 s^2 + 0.25 s + 0.5
```

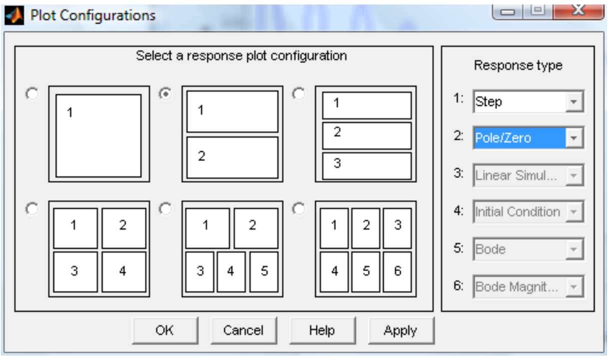
A visszacsatolt rendszert a `feedback` utasítással hozhatjuk létre, ahol -1 jelöli a negatív visszacsatolást

```
>> closedLoop=feedback(plant,tf(1,1),-1)

Transfer function:
         1
--------------------
2 s^2 + 0.25 s + 1.5
```

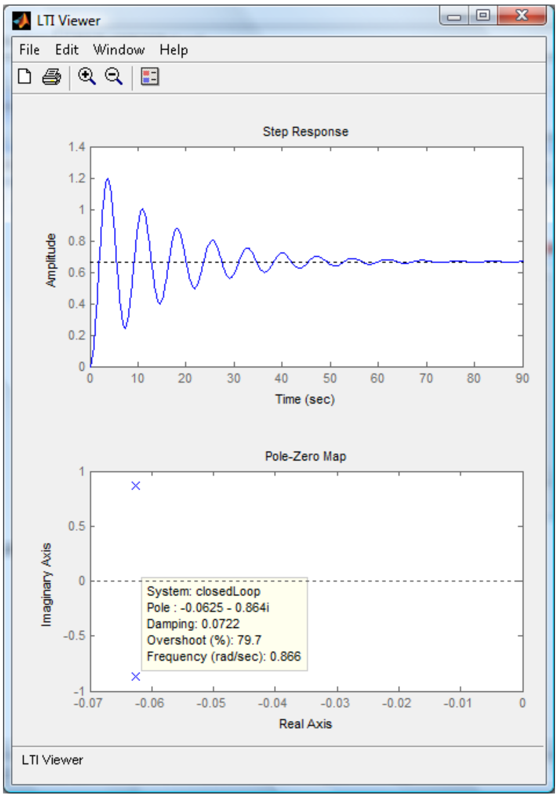
Az LTI Viewer-be ezt a rendszert importáljuk.



Jelenítsük meg egyszerre a zárt kör ugrásválaszát és pólus-zérus eloszlását. Ezt az `Edit/Plot Configuration` parancshoz tartozó párbeszédablak megfelelő opcióinak kiválasztásával érhetjük el.



A kapott jellemzőket mutatja a következő ábra.



Az átviteli függvényből és a pólus-zérus eloszlásból is látható, hogy a zárt rendszer egy kéttárolós lengőtag. A Matlab CST pólus-zérus eloszlást mutató ábráján bármely konjugált komplex póluspárhoz leolvashatóak annak paraméterei, ha rákattintunk. Itt egyetlen ilyen póluspár van, tehát annak paraméterei a teljes átviteli függvénynek jellemzői. A leolvasás eredménye a táblázatban szerepel. Megjegyezzük, hogy az ugrásválasz és a pólus-zérus eloszlás külön is kirajzoltatható a `step`, illetve a `pzmap` utasításokkal.

Matlab megnevezés	Értelmezés	Érték
`System`	Az ábrázolt LTI rendszert tartalmazó változó neve.	closedLoop
`Pole`	Pólus helye a komplex számsíkon.	-0.0625-0.864j
`Damping`	A kéttárolós lengőtag átviteli függvényében ξ -vel jelölt csillapítási tényező.	0.0722
`Overshot (%)`	A kéttárolós lengőtag ugrásválaszának túllövése százalékban.	79.7%
`Frequency (rad/sec)`	A kéttárolós lengőtag átviteli függvényében ω_0 -val jelölt csillapítatlan sajátfrekvencia.	0.866 rad/sec

A zárt kör ugrásválaszának végértékét a `dcgain` utasítás adja meg.

```
>> dcgain(closedLoop)

ans =

    0.6667
```

ahonnan a statikus hiba

$$e(\infty) = r(\infty) - v(\infty) = 1 - 0.6667 = 0.3333.$$

Az arányos szabályozó tehát nem ad kielégítő zártkörű viselkedést részben a nagy túllövés, részben a nagy statikus hiba miatt.

A gyökhelygörbe

A gyökhelygörbe a zárt rendszer pólusainak vándorlását mutatja a komplex számsíkon a körerősítés függvényében. A zárt rendszer pólusai az $1+W_0(s)$ nevező zérushelyei. Felhasználva $W_0(s)$ korábban megadott általános kifejezését az

$$1+W_o(s) = 1+\frac{K}{s^i}\cdot\frac{\prod(1+s\tau_i)\prod(1+2\mu_i\tau_i s+\tau_i^2 s^2)}{\prod(1+sT_i)\prod(1+2\xi_i T_i s+T_i^2 s^2)} =$$

$$= \frac{s^i\prod(1+sT_i)\prod(1+2\xi_i T_i s+T_i^2 s^2)+K\prod(1+s\tau_i)\prod(1+2\mu_i\tau_i s+\tau_i^2 s^2)}{s^i\prod(1+sT_i)\prod(1+2\xi_i T_i s+T_i^2 s^2)} = 0$$

összefüggést kapjuk. Itt a zárt kör pólusai a számláló gyökei. A számláló fokszáma megegyezik a felnyitott kör pólusainak számával. A nemnegatív K értékekre a számláló gyökei kiszámolhatók és ábrázolhatók a komplex számsíkon. A keletkezett görbék összességét nevezzük gyökhelygörbének (angolul root locus vagy root loci).

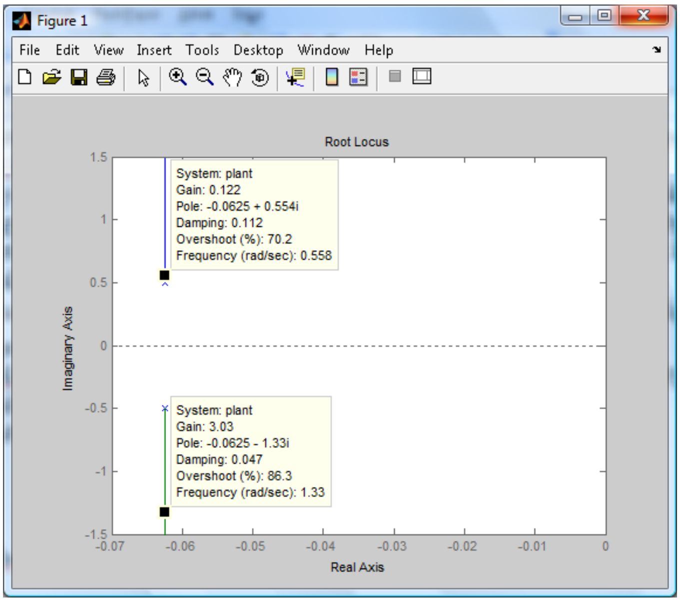
A gyökhelygörbe tulajdonságainak részletes ismertetésétől itt eltekintünk, kivéve egy egyszerűen belátható tulajdonságát, nevezetesen a valós tengelyre vett szimmetriáját, amely abból következik, hogy nem tisztán valós gyökök csak komplex konjugált párokban fordulhatnak elő.

Látható, hogy K=0 esetén a gyökök a $W_o(s)$ pólusai, $K=\infty$ esetén pedig $W_o(s)$ (esetlegesen végtelenben található) zérusaihoz tartanak.

A Matlab a gyökhelygörbe kirajzolását az `rlocus` utasítás nyomán hajtja végre. Az utasítás argumentuma a felnyitott kör átviteli függvénye. Ismét a

$$W_o(s)=\frac{1}{ms^2+bs+k}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{1+\frac{b}{k}s+\frac{m}{k}s^2}$$

átviteli függvényű mechanikai lengőrendszert tekintve a gyökhelygörbét az ábra mutatja.



A pólus-zérus eloszláshoz hasonlóan itt is elég a gyökhelygörbe valamely pontjára kattintani, hogy a hozzá tartozó pólus tulajdonságait leolvassuk. Az is látható, hogy a lengőrendszer esetében egy egyszerű (pozitív erősítésű) K típusú szabályzóval a felnyitott körben meglévő csillapítást zárt körben már nem tudjuk növelni csak csökkenteni (ami rossz), azaz a túllövést is csak növelni tudjuk (ami rossz), de csökkenteni nem.

A Bode- és a Nyquist-diagramok

A szabályozási kör analízise szempontjából szerepe van a képzetes tengely képének a felnyitott kör $W_o(s)$ átviteli függvénye szerint. Legyen $\omega \in [-\infty, \infty]$ egy valós paraméter, amit körfrekvenciának nevezünk. Akkor a képzetes tengely képe a komplex számsíkon a

$$\omega \to W_o(j\omega)$$

leképezés által definiált görbe. Ezt a görbét szabályozási kör Nyquist-görbéjének nevezzük, rajzát pedig Nyquist-diagramnak.

A felnyitott kör Bode-diagramja a Nyquist-görbének csak a pozitív körfrekvenciákhoz tartozó felét ábrázolja egy amplitúdómenet és egy fázismenet segítségével:

$$a_{dB}(\omega) = 20\lg|W_o(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \arg W_o(j\omega)$$

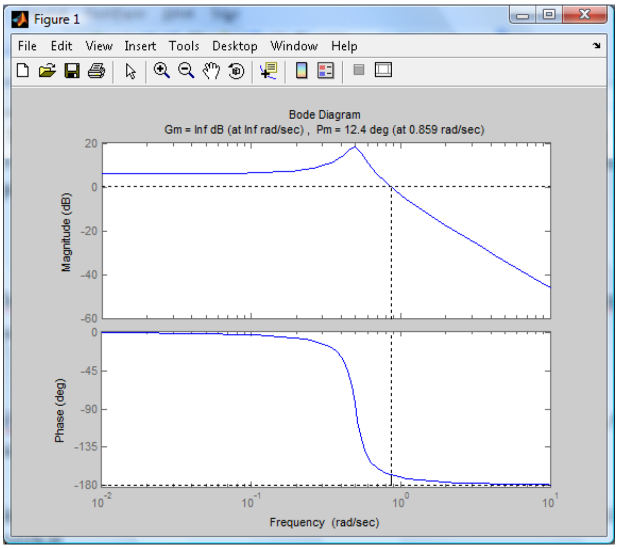
A Bode-diagram esetében ω_c vágási frekvenciának azt az (első nemnegatív) frekvenciát nevezzük, ahol az amplitúdómenet metszi a 0dB tengelyt, azaz

$$a_{dB}(\omega_c) = 0 \qquad |W_o(j\omega_c)| = 1.$$

A Nyquist-görbe a vágási frekvencián metszi az egységsugarú kört. A vágási frekvenciához kötődik a φ_t fázistartalék (phase margin) fogalma

$$\varphi_t = \pi + \varphi_t(\omega_c).$$

Határozzuk meg a mechanikai lengőrendszer vágási frekvenciáját és fázistartalékát (`margin` utasítás).



A Matlab a fázist és a fázistartalékot (`Pm`, phase margin) fokban adja meg.

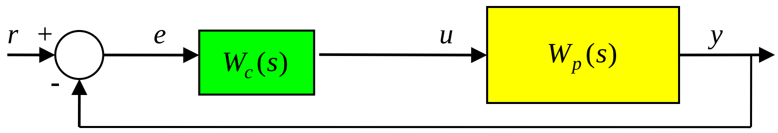
Példarendszerek

Mechanikai lengőrendszer szabályozása

Legyen a szabályzó átviteli függvénye

$$W_c(s) = K\frac{1+0{,}5s+4s^2}{s(s+1)}.$$

Alkalmazzuk ezt a szabályozót. Ekkor a szabályozási kör hatásvázlata:



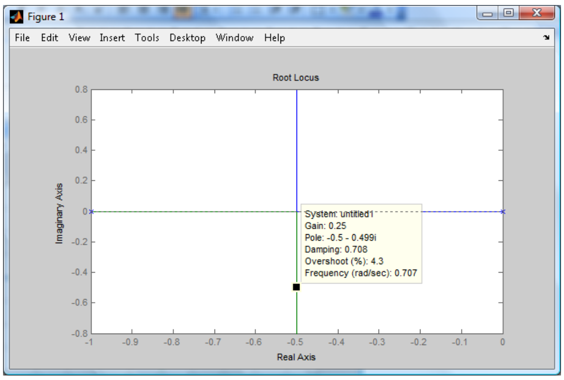
A gyökhelygörbe segítségével állítsunk be a zárt körben $\sqrt{2}/2 \approx 0{,}707$ értékű csillapítást. Adjuk meg a vágási frekvenciát és a fázistartalékot. Adjuk meg a zárt kör ugrásválaszát és pólus-zérus eloszlását az LTI Viewer segítségével. Határozzuk meg a statikus hibát. A felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_o(s) = K\frac{1+0{,}5s+4s^2}{s(s+1)}\cdot\frac{2}{1+0{,}5s+4s^2} = \frac{2K}{s(s+1)}.$$

A szabályzó zérusai tehát kiejtik a szakasz pólusait. A zárt rendszer átviteli függvénye

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = W_{cl}(s) = \frac{W_o(s)}{1+W_o(s)} = \frac{2K}{s(s+1)+2K} = \frac{1}{\frac{1}{2K}s^2+\frac{1}{2K}s+1}.$$

A nevezőt összevetve a kéttárolós lengőtag $T^2s^2+2\xi Ts+1$ nevezőjével azt kapjuk, hogy $\xi=\sqrt{2K}/4K$, ahonnan K=0.25, de K értékét a gyökhelygörbe segítségével is meghatározhatjuk (`rlocus(tf(2,[1 1 0]))`):

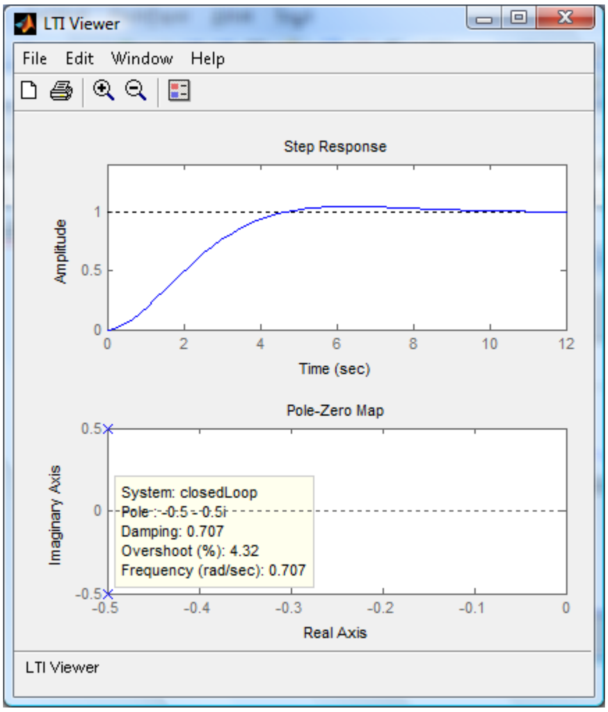


A zárt rendszer átviteli függvénye tehát

```
>> closedLoop=feedback(tf(2*0.25,[1 1 0]),tf(1,1),-1)

Transfer function:
     0.5
-------------
s^2 + s + 0.5
```

A kívánt jellemzők ábrázolásához az LTI böngészőt használjuk. A vizsgálni kívánt rendszert a böngésző indításakor közvetlenül is megadhatjuk.

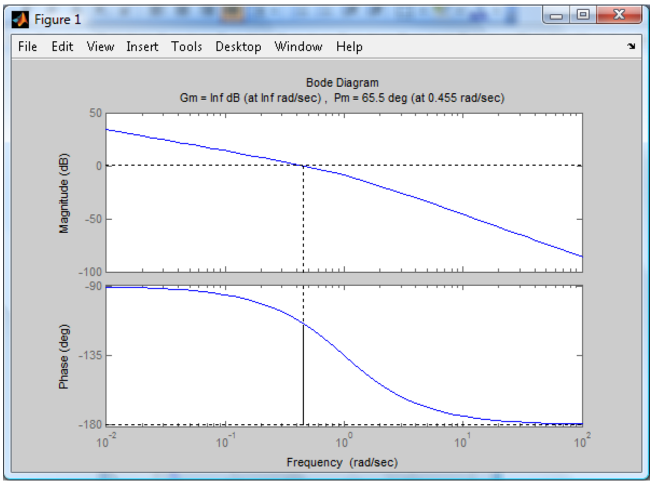
```
>> ltiview(closedLoop)
```



Látható, hogy a zárt kör ugrásválaszának végértéke 1, tehát a statikus hiba nulla. A szabályozási kör típusszáma 1, a körerősítés pedig 0.5. A megadott csillapítás igen kicsi, 4%-os túllövést eredményez, ugyanakkor az ugrásválasz felfutása gyors. A csillapítás megfelelő beállításával tehát sikerült a felnyitott körben tapasztalt lengő viselkedést elnyomni.

A fázistartalék meghatározását a `margin` utasítás segítségével végezzük el.

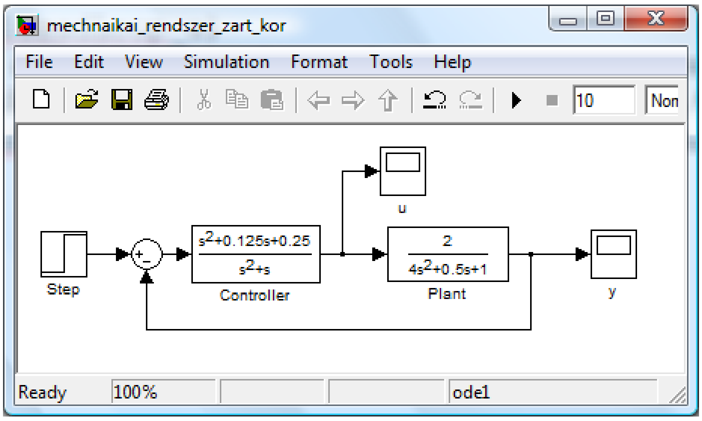
```
>> margin(tf(2*0.25,[1 1 0]))
```

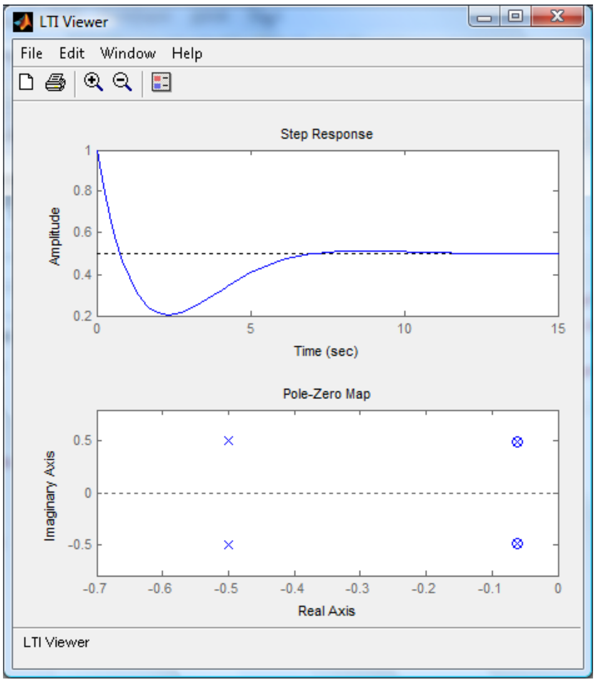


A zárt kör működésével kapcsolatban még kíváncsiak vagyunk a beavatkozó jel alakulására. Ehhez meghatározzuk az alapjel és a beavatkozó jel közötti átviteli függvényt zárt körben, majd importáljuk az LTI böngészőbe.

```
>>closedLoop_u=feedback(tf(0.25*[4 0.5 1],[1 1 0]),tf(2,[4 0.5 1]),-1)

Transfer function:
4 s^4 + s^3 + 2.063 s^2 + 0.25 s + 0.25
----------------------------------------
4 s^4 + 4.5 s^3 + 3.5 s^2 + 1.25 s + 0.5

>> ltiview(closedLoop_u)
```

Látható, hogy a Matlab a zérusok és pólusok egyszerűsítését nem végzi el magától, ennek kikényszerítésére a `minreal` utasítás használható. A zárt kör működését a Simulink segítségével is vizsgálhatjuk, a felépített hatásvázlat az ábrán látható.



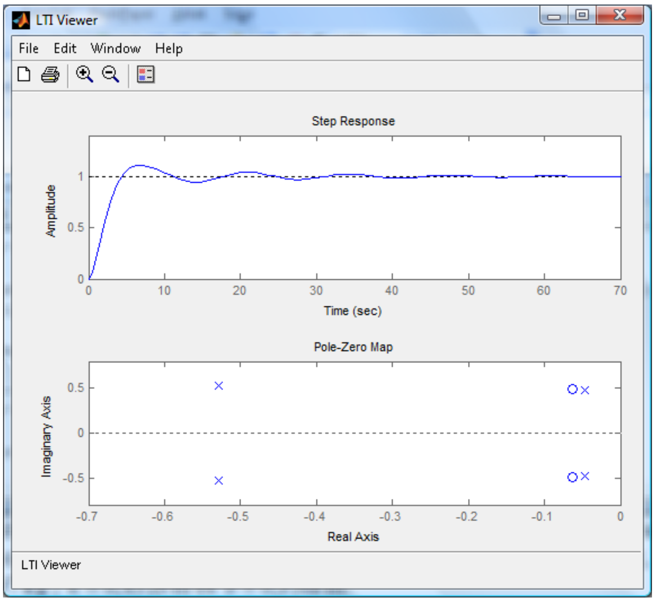


A gyakorlatban a szakasz paraméterei csak bizonyos pontossággal ismertek, tehát a pólus-zérus kiejtés nem megvalósítható. Vizsgáljuk meg azt az esetet, ha ugyanezt a szabályozót használjuk más paraméterértékekkel rendelkező szakaszhoz, például legyen $m = 1.97\,\mathrm{kg}$, $k = 0.45\,\mathrm{N/m}$ és $b = 0.3\,\mathrm{Ns/m}$. A zárt kör számítását Matlabban az alábbiak szeint végezhetjük el.

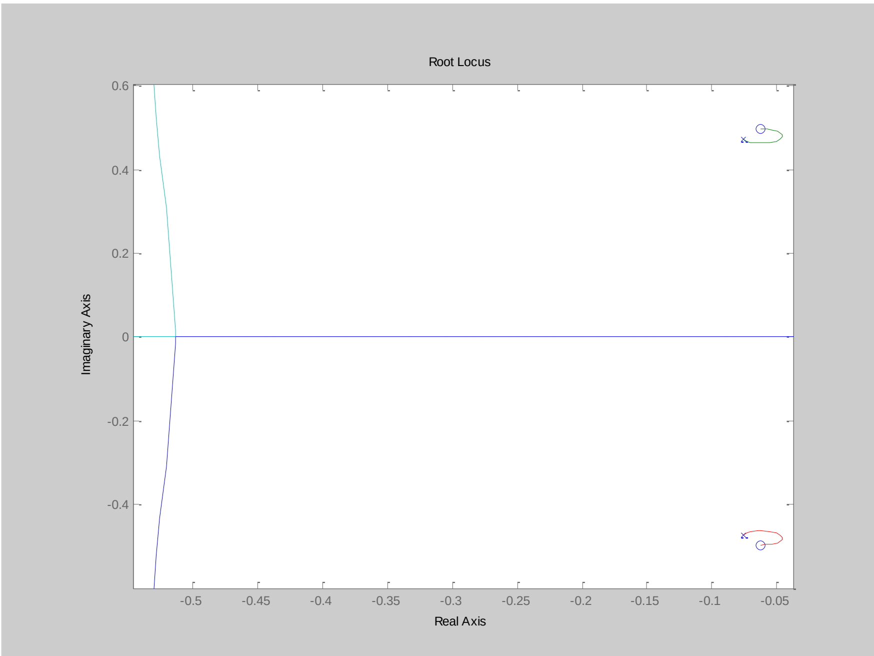
```
>> closedLoop=feedback(series(tf(0.25*[4 0.5 1],…
[1 1 0]),tf(1,[1.97 0.3 0.45])),tf(1,1),-1)

Transfer function:
             s^2 + 0.125 s + 0.25
---------------------------------------------
1.97 s^4 + 2.27 s^3 + 1.75 s^2 + 0.575 s + 0.25

>> ltiview(closedLoop)
```

ahol a három pont … lehetővé teszi, hogy egy utasítást egy új sorban folytassunk. Az ugrásválaszra, a pólus-zérus eloszlásra és a gyökhelygörbére vagyunk kíváncsiak. Ahogy vártuk, a kiejtés nem valósult meg, ennek következtében a gyökhelygörbe bonyolódik.

Ugyanakkor az ugrásválasz hasonló a pontos kiejtés során kapott ugrásválaszhoz, bár egy járulékos lengés jelenik meg.




```
>> rlocus(series(tf(0.25*[4 0.5 1],[1 1 0]),…
   tf(1,[1.97 0.3 0.45])))
```



A gyökhelygörbén látható, hogy a zárt körnek összesen négy pólusa lesz, melyek közül kettő hasonlóan helyezkedik el a pontos kiejtésnél megfigyelt esethez.

Ugyanakkor a kiejtés helyéhez közel megjelenik még egy lassan lecsengő és a járulékos lengésért felelős konjugált komplex póluspár.

Egyenáramú motor pozíciószabályozása

Tekintsük az egyenáramú motor modelljét. Az állapotváltozók vektora $x = (\psi \quad \dot{\psi} \quad i_r)^T$, melynek elemei a motor tengelyének szögelfordulása, szögsebessége és a rotor tekercsében folyó áram, a kimenet $y = \psi$. A modellt állapotegyenlet alakjában adjuk meg

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -f/\Theta & c_2/\Theta \\ 0 & -c_1/L_r & -R_r/L_r \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_r \end{bmatrix},$$

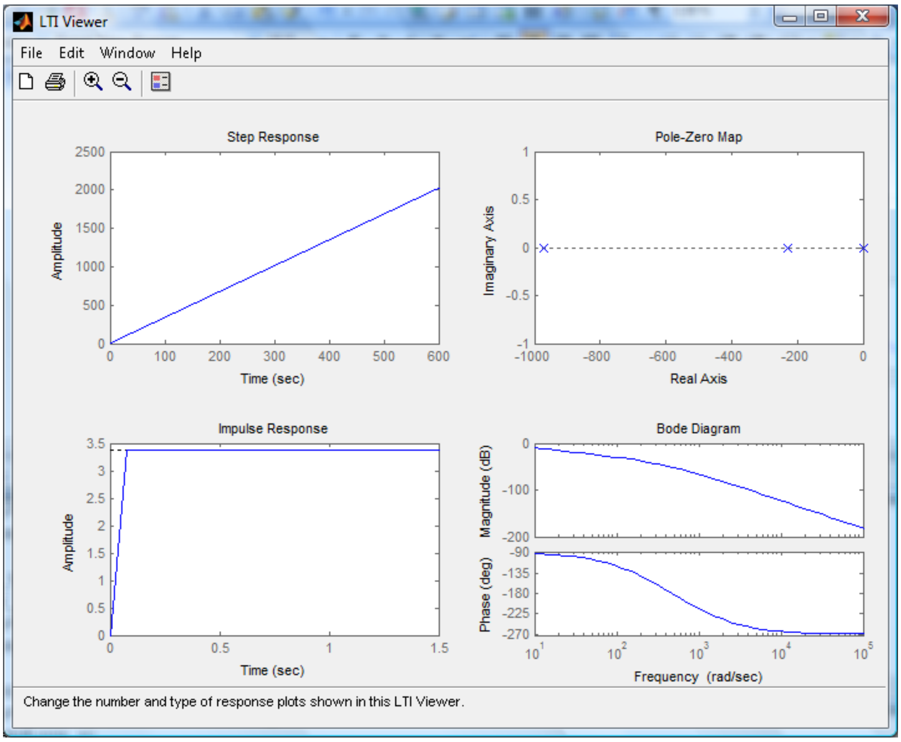
ahol a paraméterek jelentését és értéküket a táblázat magyarázza.

Jelölés	Magyarázat	Érték
f	súrlódás	$8.01 \cdot 10^{-3}$ Nms/rad
Θ	forgó inercia	$4 \cdot 10^{-5}$ Kgm^2
c_2	nyomatékállandó	0.03 Nm/A
c_1	sebességállandó	0.03 Vs/rad
L_r	A motor kapcsai között mérhető indukció	1 mH
R_r	A motor kapcsai között mérhető ellenállás	$1\,\Omega$

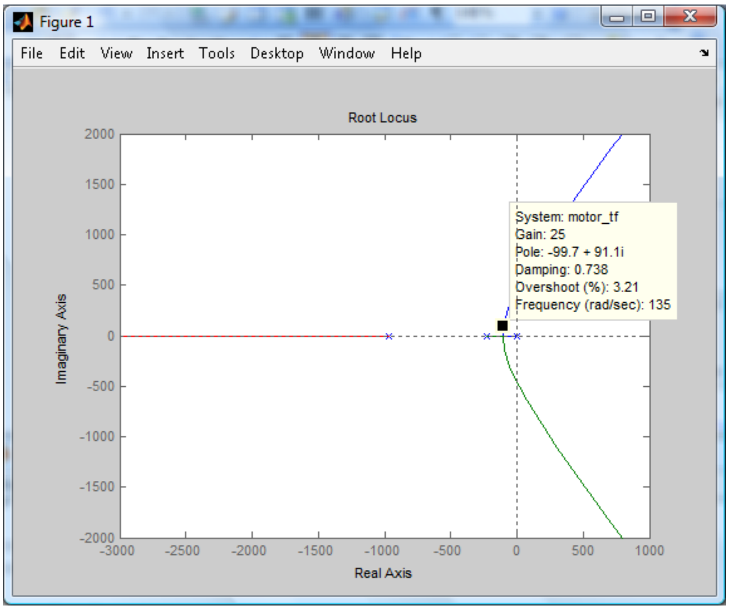
A paraméter értékeket felhasználva a Matlab CST-ben létrehozzuk a szakaszmodellt.

```
>> f = 8.01e-3; Theta = 4e-5; c2 = 0.03; c1 = 0.03;
>> Lr = 1e-3; Rr = 1;
>> A = [0 1 0; 0 -f/Theta c2/Theta; 0 -c1/Lr -Rr/Lr];
>> B = [0; 0; 1/Lr];
>> C = [1 0 0];
>> D = 0;
>> motor_ss = ss(A,B,C,D);
>> motor_tf = tf(motor_ss)

   Transfer function:
             7.5e005
   ----------------------------
   s^3 + 1200 s^2 + 2.227e005 s
```

A szakasz jellemzőinek megjelenítésére a szokásos módon a LTI böngészőt használjuk.

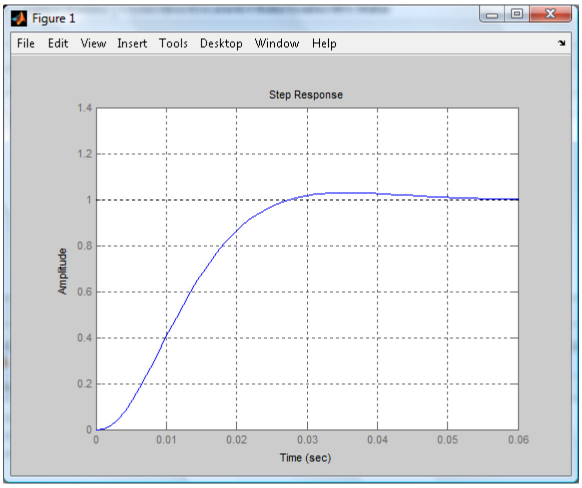


Az ugrásválasz végértéke $+\infty$, ami az origóban található pólusnak köszönhető. Ábrázoljuk a gyökhelygörbét és keressük meg azt az erősítést, amely esetében a zárt kör egy $\xi \approx \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ vagy annál valamivel nagyobb csillapítású póluspárt és egy valós pólust tartalmaz!



Leolvasható, hogy ez az erősítés 25. Számítsuk ki a zárt kör átviteli függvényét és ábrázoljuk annak ugrásválaszát.

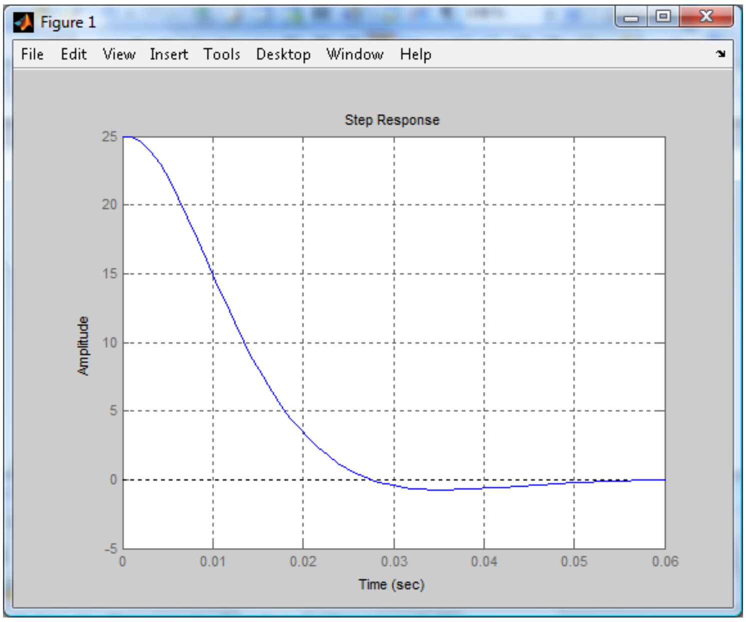
```
>>closedLoop=feedback(series(tf(25,1),motor_tf),tf(1,1),-1)

Transfer function:
               1.875e007
----------------------------------------
s^3 + 1200 s^2 + 2.227e005 s + 1.875e007

>> step(closedLoop); grid on;
```



Látható, hogy a maradó hiba nulla, a túllövés pedig a komplex konjugált póluspár csillapításának megfelelő.

Szeretnénk továbbá azt is meghatározni, hogy az ugrásválasz tranzienséhez milyen beavatkozó jel (motor kapcsaira jutó feszültség) tartozik. Ehhez az alapjel és a beavatkozó jel közötti átviteli függvényt kell meghatározni.

```
>> closedLoop_u=feedback(tf(25,1),motor_tf,-1)

Transfer function:
  25 s^3 + 3.001e004 s^2 + 5.569e006 s
----------------------------------------
s^3 + 1200 s^2 + 2.227e005 s + 1.875e007

>> step(closedLoop_u); grid on;
```



A szabályozási kör vágási frekvenciáját és a hozzá tartozó fázistartalékot a `margin` utasítás segítségével lehet meghatározni, melynek paramétere a flenyitott kör átviteli függvénye.

```
>> margin(series(tf(25,1),motor_tf))
```

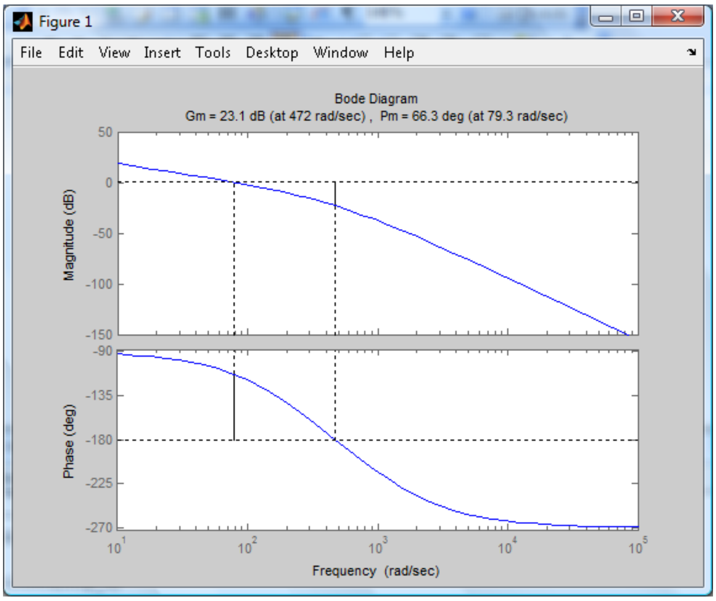


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Bode Diagram
Gm = 23.1 dB (at 472 rad/sec) , Pm = 66.3 deg (at 79.3 rad/sec)
Magnitude (dB)
50
0
-50
-100
-150
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
Frequency (rad/sec)

2. Ellenőrző kérdések a gyakorlathoz

1. Mi a folytonosidejű SISO időinvariáns lineáris rendszer felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvényének szabályozástechnikában szokásos általános alakja? Hogyan értelmezzük a felnyitott kör körerősítését és típusszámát?

2. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen
$$W_0(s) = \frac{25(s+0.1)}{s(s+1)(s+5)} .$$
Adja meg a felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvényét a szabályozástechnikában szokásos általános alakban, amelyből közvetlenül leolvasható a felnyitott kör körerősítése és típusszáma!

3. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen
$$W_0(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)} .$$
Rajzolja fel a felnyitott kör $a_{dB}(\omega)$ <u>aszimptotikus</u> amplitúdó-jelleggörbéjét, jelölje be abban K értékét, és az ábrát egészítse ki a <u>pontos</u> $\varphi(\omega)$ fázis-jelleggörbével! Határozza meg az ábrák alapján az ω_c vágási frekvenciát és a φ_t fázistöbbletet!

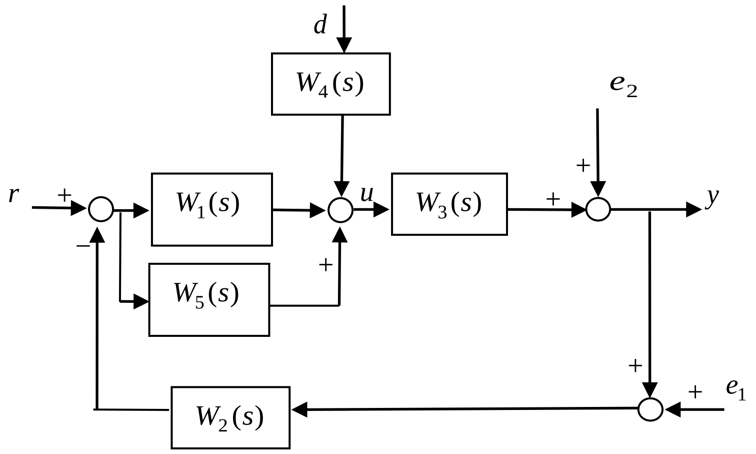
4. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen
$$W_0(s) = \frac{10(1+s)}{s^2(1+0.1s)} .$$
Rajzolja fel a felnyitott kör $a_{dB}(\omega)$ <u>aszimptotikus</u> amplitúdó-jelleggörbéjét, jelölje be abban K értékét, és határozza meg az ábra alapján az ω_c vágási frekvenciát! Segítség: Mennyi K/ω^2 értéke $\omega = 1$ estén?

5. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen
$$W_0(s) = \frac{0.05(1+100s)}{s(1+10s)(1+2s)} .$$
Rajzolja fel a felnyitott kör $a_{dB}(\omega)$ <u>aszimptotikus</u> amplitúdó-jelleggörbéjét és határozza meg az abból következő ω_c vágási frekvenciát!

6. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen
$$W_0(s) = \frac{0.05(1+100s)}{s(1+10s)(1+2s)} .$$

Határozza meg a felnyitott kör $\varphi(\omega)$ pontos fázis-jelleggörbéjét képletszerűen az egyes alaptagok fázisainak előjelhelyes összegeként radiánban és fokban!

7. Tekintsük az alábbi ábrán látható rendszert:



Adja meg a $W_{yr}(s)$, $W_{ur}(s)$, $W_{yd}(s)$, $W_{ye_1}(s)$, $W_{ye_2}(s)$, $W_{ud}(s)$, $W_{ue_1}(s)$, $W_{ue_2}(s)$ átviteli függvényeket! Megjegyzés: Az első index a kimenetet, a második index a bemenetet jelöli az átviteli függvényekben.

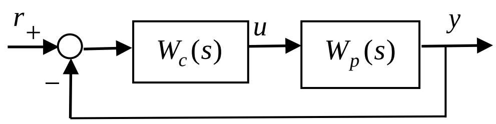
8. Egy szabályozott szakasz átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{A(1+s\tau_1)}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

A statikus erősítés és az időállandók értéke legyen rendre:

$$A = 10,\ T_1 = 100\text{sec},\ T_2 = 10\text{sec},\ T_3 = 1\text{sec},\ \tau_1 = 10\text{sec}.$$

A szabályozott szakaszt az ábra szerint visszacsatoljuk $W_c(s) = 1$ mellett.



Rajzolja fel a felnyitott kör $a_{dB}\omega)$ aszimptotikus amplitúdó-jelleggörbéjét és a $\varphi(\omega)$ fázis-jelleggörbét! Adja meg a rendszer törésponti frekvenciáit! Becsülje meg a rendszer vágási frekvenciáját, fázistartalékát, erősítéstartalékát!

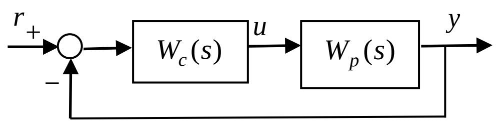
9. Egy szabályozott szakasz átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{A}{s(1+sT_1)}$$

A statikus erősítés és az időállandók értéke legyen rendre:

$$A = 10,\ T_1 = 0.01\text{sec}$$

A szakaszt az ábra szerint visszacsatoljuk $W_c(s) = 1$ mellett.



Rajzolja fel a felnyitott kör $a_{dB}\omega)$ aszimptotikus amplitúdó-jelleggörbéjét és a $\varphi(\omega)$ fázis-jelleggörbét! Adja meg a rendszer törésponti frekvenciáit! Becsülje meg a rendszer vágási frekvenciáját, fázistartalékát, erősítéstartalékát! Milyen konstans $W_c(s) = K$ értéktartományban lesz pozitív a felnyitott kör fázistartaléka?

10. Egy szabályozott szakasz átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{A}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

A statikus erősítés és az időállandók értéke legyen rendre:

$$A = 10,\ T_1 = 1\text{sec},\ T_2 = 10\text{ sec}$$

Adja meg a <u>szakasz</u> pólusait, zérusait és a karakterisztikus egyenletét! Hova konvergál a $W_p(s)$ szakasz $v_p(t)$ átmenet függvénye (ugrásválasza) $t \to \infty$ és $t = 0$ esetén? Mi lesz a <u>zárt</u> rendszer $W(s)$ átviteli függvénye, ha a kimenetet ún. egységnyi merev visszacsatolással negatívan visszacsatoljuk a bemenetre? Hova konvergál a zárt rendszer $v(t)$ átmeneti függvénye $t \to \infty$ esetén?

11. Egy szabályozott szakasz átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{A}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

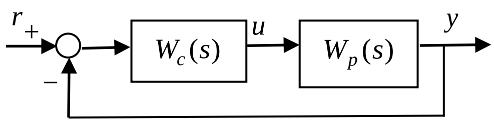
A statikus erősítés és az időállandók értéke legyen rendre:

$$A = 10,\ T_1 = 100\text{sec},\ T_2 = 10\text{sec},\ T_3 = 1\text{sec}$$

A szakaszt az alábbi ábra szerint visszacsatoljuk az a) vagy b) szabályozóval, ahol

a) $W_c(s) = 1$

b) $W_c(s) = \dfrac{1+s\tau_1}{1+sT_4}$, $\tau_1 = 100\text{sec}$, $T_4 = 10\text{sec}$

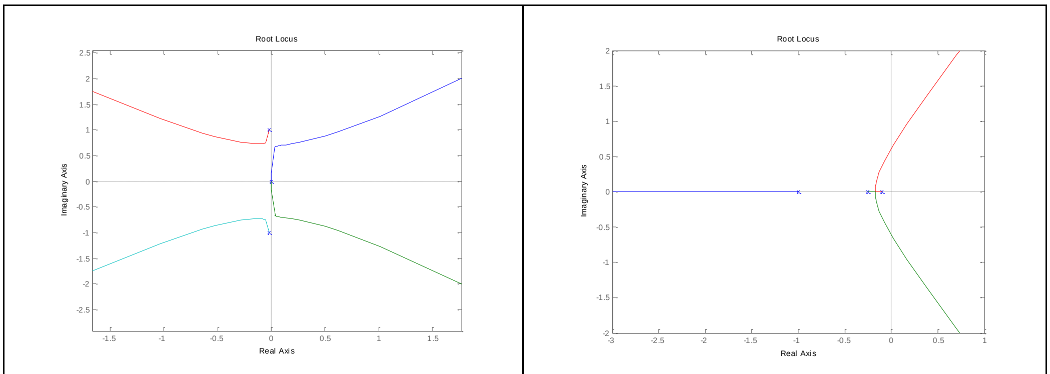


Melyik szabályozót alkalmazná, ha az elsődleges cél:

1. eset: Nagy fázistartalék elérése.
2. eset: Az állandósult hiba minimalizálása.
3. eset: A $t = 0$ helyen megjelenő beavatkozó jel abszolút értékének minimalizálása.

Válaszát minden esetben indokolja is!

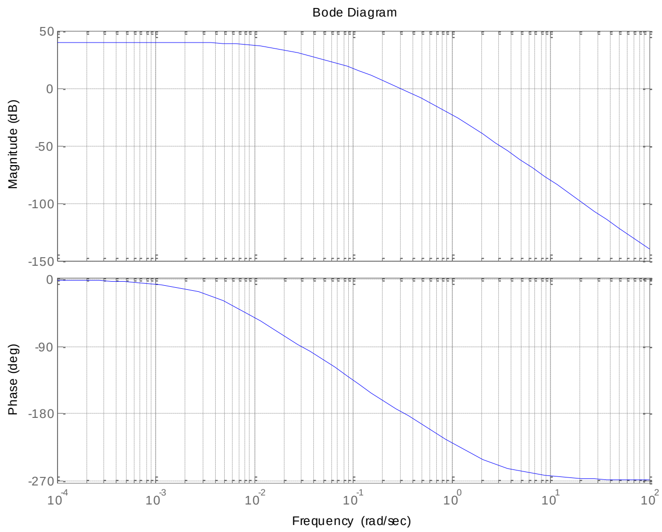
12. Az alábbi ábrán két szabályozási kör gyökhelygörbéjét (root locus) láthatjuk:



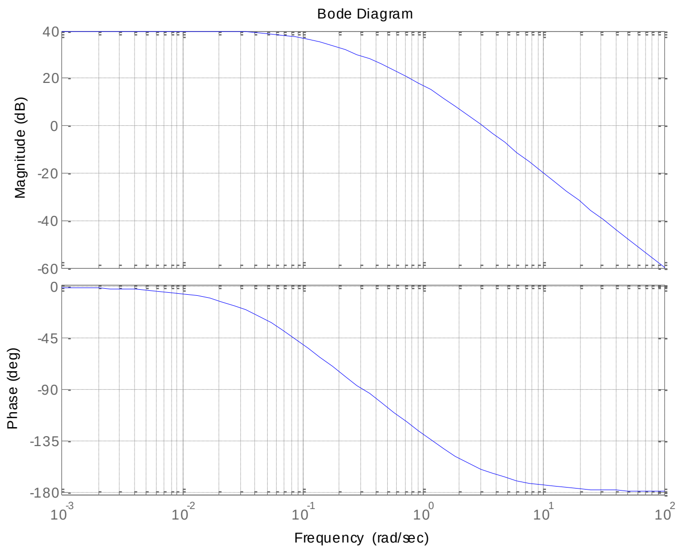
a) b)

Melyik esetben tervezhető stabilis zárt kört adó szabályozás a körerősítés hangolásával?

13. A két ábrán két szabályozási kör felnyitott körének Bode-diagramja látható:



a)



b)

Melyik esetben nagyobb az erősítéstartalék, illetve a fázistartalék?

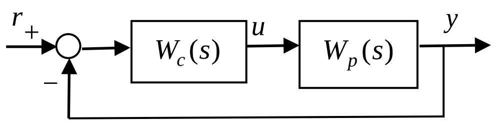
14. Adott két szabályozási rendszer, két felnyitott körrel:

$$W_{01}(s)=\frac{10}{s(s+10)} \qquad W_{02}(s)=\frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

Melyik esetben kisebb az állandósult hiba a zárt szabályozási körben egységugrás alapjel esetén? Válaszát indokolja is!

15. Az alábbi ábrán látható szabályozási rendszerben

$$W_c(s)=K\,, \quad W_p(s)=\frac{10}{(1+s)(1+10s)}$$



Adja meg a <u>zárt</u> rendszer pólusait, zérusait, statikus erősítését és karakterisztikus egyenletét K függvényében!

16. Egy szabályozási kör specifikációjában az állandósult hiba egy ugrásalakú alapjelváltozás esetén az alapjelváltozást követő $T_{1\%}$ idő után nem haladhatja meg az alapjelváltozás 1% át, miközben a tranziensnél maximum $\Delta v\%$ túllövés engedhető meg. A specifikáció milyen csillapítatlan körfrekvenciájú és csillapítású kéttárolós lengő tagnak (zárt kör domináns pólusnak) felel meg?

17. Adja meg $W_p(s), W_c(s), W_0(s), W_{cl}(s)$ képletszerű alakját s-ben, ha a Matlab CST-ben a következő utasítások szerepeltek:

```
Wp=tf(1,conv([1 1],[0.1 1]));
Wc=series(tf(10,1),parallel(tf(1,1),tf(1,[1 0])));
W0=series(Wp,Wc);
Wcl=feedback(W0,tf(1,1),-1);
```

Adja meg a zárt szabályozási kör hatásvázlatát, és abban tüntesse fel az összekapcsolt komponenseket! Adja meg a zárt szabályozási kör pólus/zérus eloszlását, amely megfelel $W_{cl}(s)$-nek!

18. Adja meg $W_p(s), W_c(s), W_0(s), W_{cl}(s)$ képletszerű alakját s-ben, ha a Matlab CST-ben az alább részletezett utasítások szerepeltek! Vázolja fel a figure(1) ábra tartalmát az utasítássorozat után!

```
clc
Wp=tf(1,conv([1 1],[0.1 1]))
Wc=series(tf(10,1),parallel(tf(1,1),tf(1,[1 0])))
W0=series(Wp,Wc)
%W0=minreal(W0)
Wcl=feedback(W0,tf(1,1),-1)
Wcl_zpk=zpk(Wcl)
%[w,d,p]=damp(Wcl)
pause
figure(1)
subplot(2,1,1)
step(Wcl)
pause
subplot(2,1,2)
pzmap(Wcl)
pause
```

Írja le azokat a lépéseket, amelyekkel hasonló ábrát lehet előállítani az `ltiview` szolgáltatásaival!

19. Adja meg $W_p(s), W_c(s), W_0(s), W_{cl}(s)$ képletszerű alakját s-ben, ha a Matlab CST-ben az alább részletezett utasítások szerepeltek! Mi lesz a `damp` utasítás hatása a command window-ban? Vázolja fel a figure(1) ábra tartalmát az utasítássorozat után!

```
clc
Wp=tf(1,conv([1 1],[0.1 1]))
Wc=series(tf(10,1),parallel(tf(1,1),tf(1,[1 0])))
W0=series(Wp,Wc)
W0=minreal(W0)
Wcl=feedback(W0,tf(1,1),-1)
Wcl_zpk=zpk(Wcl)
[w,d,p]=damp(Wcl)
pause
figure(1)
subplot(2,1,1)
step(Wcl)
pause
subplot(2,1,2)
pzmap(Wcl)
pause
```

Írja le azokat a lépéseket, amelyekkel hasonló ábrát lehet előállítani az `ltiview` szolgáltatásaival!

20. Adja meg $W_p(s), W_c(s), W_0(s), W_{cl}(s)$ képletszerű alakját s-ben, ha a Matlab CST-ben az alább részletezett utasítások szerepeltek! Mi lesz a `damp` utasítás hatása a command window-ban? Vázolja fel az `ltiview` utasítás hatására megjelenő ábrát az utasítássorozat után!

```
clc
Wp=tf(1,conv([1 1],[0.1 1]))
Wc=series(tf(10,1),parallel(tf(1,1),tf(1,[1 0])))
W0=series(Wp,Wc)
W0=minreal(W0)
Wcl=feedback(W0,tf(1,1),-1)
Wcl_zpk=zpk(Wcl)
[w,d,p]=damp(Wcl)
pause
ltiview({'step';'pzmap'},Wcl)
pause
```

2. Melléklet – Matlab kód a tantermi gyakorlat ábráihoz

```
%Gyak2_T1
clear all
close all
clc %clear commands
%-------------------------------------------------
% 1. Szakasz
%-------------------------------------------------
fprintf('******************************************\n');
fprintf('1. Szakasz\n');
%
A=5; T1=10; T2=4; T3=1;
numps=A;
denps=conv(conv([T1 1],[T2 1]),[T3 1]);
sysp_tf=tf(numps,denps)
%
sysp_tf.num{1}
sysp_tf.den{1}
%
sysp_zpk=zpk(sysp_tf)
%
sysp_ss=ss(sysp_tf)
%
scont=input('continue -> Enter');
figure(1);
bode(sysp_tf);
title('A rendszer Bode-diagramja');
%
[wp_mag,wp_phase,wp_w]=bode(sysp_tf);
%
scont=input('continue -> Enter');
figure(2)
step(sysp_tf);
title('A rendszer atmeneti fuggvenye');
%
[wp_step_y,wp_step_t]=step(sysp_tf);
%
scont=input('continue -> Enter');
figure(3)
impulse(sysp_tf);
title('A rendszer impulzusvalasza');
%
[wp_impulse_y,wp_impulse_t]=impulse(sysp_tf);
%
scont=input('continue -> Enter');
figure(4)
pzmap(sysp_tf);
```

```
title('A rendszer polus-zerus eloszlasa');
%
[wp_p,wp_z]=pzmap(sysp_tf)
%
scont=input('continue -> Enter');
%------------------------------------------------
% 2. Felnyitott kor es zart rendszer P taggal, K=1
%------------------------------------------------
fprintf('******************************************\n');
fprintf('2. Felnyitott kor es zart rendszer P taggal,
K=1\n');
%
sysc_tf=tf(1,1)
sysw0=series(sysp_tf,sysc_tf)
% Egy sima "drotdarab"
sys_drot=tf(1,1);
% A zart rendszer
sys_cl=feedback(sysw0,sys_drot)
%A felnyitott es zart kor bode diagramja
figure(5)
hold on
bode(sysp_tf)
bode(sysw0)
bode(sys_cl)
hold off;
title('A folyamat, a felnyitott kor es a zart kor bode
diagramja');
legend('W_p','W_0','W_{cl}');
%
scont=input('continue -> Enter');
figure(6)
nyquist(sysw0)
%
scont=input('continue -> Enter');
figure(7)
margin(sysw0)
%
roots(sys_cl.den{1})
%
%zart kor atmeneti fuggvenye
scont=input('continue -> Enter');
figure(8)
hold on
step(sysp_tf);
step(sys_cl);
legend('W_p','W_{cl} K=1')
hold off;
%
scont=input('continue -> Enter');
%------------------------------------------------
```

```
% 2. Zart rendszer viselkedese P taggal, K=5
%-------------------------------------------------
fprintf('******************************************\n');
fprintf('2. Zart rendszer viselkedese P taggal, K=5\n');
%
%szabalyozo eloallitasa
numcs2=3;
dencs2=1;
sysc2_tf=tf(numcs2,dencs2)
% a felnyitott kor eloallitasa
sysw0_2=series(sysp_tf,sysc2_tf)
% A zart rendszer
sys_cl2=feedback(sysw0_2,sys_drot)
%vagasi frekvencia, fazistobblet
figure(9)
hold on
margin(sysw0)
margin(sysw0_2)
hold off
title('A vagasi frekvencia no, a fazistartalek csokken')
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)])
%vagasi frekvencia, fazistobblet
scont=input('continue -> Enter');
figure(10)
hold on
nyquist(sysw0)
nyquist(sysw0_2)
hold off
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)])
%zart kor atmeneti fuggvenye
scont=input('continue -> Enter');
figure(11)
hold on
step(sysp_tf);
step(sys_cl);
step(sys_cl2);
legend('W_p','W_{cl} K=1',['W_{cl},K=',num2str(numcs2)])
hold off;
%
%A felnyitott kor gyokhelygorbeje
scont=input('continue -> Enter');
figure(12)
rlocus(sysw0)
%
scont=input('continue -> Enter');
%-------------------------------------------------
% 3. Zart rendszer viselkedese PID taggal
%-------------------------------------------------
fprintf('******************************************\n');
fprintf('3. Zart rendszer viselkedese PID taggal\n');
```

```
%
%szabalyozo eloallitasa
Ap=1.7666; Ti=13.4756; Td=2.4439; T=0.5244;
numcs3=Ap/Ti*[Ti*(Td+T) Ti+T 1];
dencs3=[T 1 0];
sysc3_tf=tf(numcs3,dencs3)
% a felnyitott kor eloallitasa
sysw0_3=series(sysp_tf,sysc3_tf)
% A zart rendszer
sys_cl3=feedback(sysw0_3,sys_drot)
%A felnyitott  kor bode diagramja K=1 es K=5
%es PID eseten
figure(13)
hold on
bode(sysw0)
bode(sysw0_2)
bode(sysw0_3)
hold off
title(['A felnyitott kor  bode diagramja K=1, K=',...
    num2str(numcs2),' es PID esetben'])
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)], 'PID')
%vagasi frekvencia, fazistobblet
scont=input('continue -> Enter');
figure(14)
hold on
margin(sysw0)
margin(sysw0_2)
margin(sysw0_3)
hold off
title('A vagasi frekvencia no, a fazistartalek csokken')
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)],'PID')
%vagasi frekvencia, fazistobblet
scont=input('continue -> Enter');
figure(15)
hold on
nyquist(sysw0)
nyquist(sysw0_2)
nyquist(sysw0_3)
hold off
legend('K=1',['K=',num2str(numcs2)],'PID')
%zart kor atmeneti fuggvenye
scont=input('continue -> Enter');
figure(16)
hold on
step(sysp_tf);
step(sys_cl);
step(sys_cl2);
step(sys_cl3);
hold off;
```

```
legend('W_p','W_{cl}
K=1',['W_{cl},K=',num2str(numcs2)],'PID')
%A felnyitott kor gyokhelygorbeje PID-nel
scont=input('continue -> Enter');
figure(17)
rlocus(sysw0_3)
%
```