Valószínűségszámítás A4: Magic Képletek

Arany Dániel

December 2019

1 Bemutatás, figyelmeztetés

Ezek a képletek csak egy összefoglalást biztósítanak (azt is hiányosan valószínűleg), tehát tanulni kell mellé. Cserébe kis logikával, a legtöbb feladat levezethető a segitségükkel.

2 Várható érték, szórás stb.

2.1 Várható érték

$E(x)$ "lineáris operátor". Ha X és Y független akkor $E(xy) = E(x) \cdot E(y)$

Folytonos eset: f(x) a sűrűségfüggvény

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Diszkrét eset:

$$E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p(x_k)$$

2.2 Második momentum

Folytonos eset:

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

Diszkrét eset:

$$E(x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot p(x_k)$$

2.3 Variancia

$$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

2.4 Szórás

$$D(x) = \sqrt{E(x^2) - (E(x))^2} = \sqrt{Var(x)}$$
$$D(cx) = \sqrt{c} \cdot D(x)$$

Azaz ha pl. 1000 dolognak kell a szórása akkor egy dolog szórását $\sqrt{1000}$-rel kell szorozni.

3 Diszkrét eloszlások

3.1 Hipergeometrikus

$$p(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{x}}$$

N dolog közül M megkülönböztetett, n-szer húzunk visszatevés nélkül, x darabot húztunk a megkülönböztetettek közül.

$$E(x) = n\frac{M}{N} \qquad D(x) = \sqrt{n\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)}$$

3.2 Binomiális

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{(n-x)}$$

Sok dolog közül n húzásból visszatevés nélkül x-szer húzunk jót, egy jó húzás valószínűsége p.

$$E(x) = n \cdot p \qquad D(x) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

3.3 Optimista geometriai

$$p(x) = (1-p)^{(x-1)} \cdot p$$

Az első siker bekövetkezésig végzett kísérletek száma x.
Egy siker valószínűsége p.

$$E(x) = \frac{1}{p} \qquad D(x) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

3.4 Pesszimista geometriai

$$p(x) = (1-p)^x \cdot p$$

Az első siker bekövetkezésig megtörtént kudarcok száma x.
Egy siker valószínűsége p.

$$E(x) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \qquad D(x) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

3.5 Optimista negatív binomiális

$$p(x) = \binom{x-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^{(x-n)}$$

Az n. siker bekövetkezésig végzett kísérletek száma x.
Egy siker valószínűsége p.

$$E(x) = \frac{n}{p} \qquad D(x) = \frac{\sqrt{n(1-p)}}{p}$$

3.6 Pesszimista negatív binomiális

$$p(x) = \binom{x+n-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^x$$

Az n. siker bekövetkezésig megtörtént kudarcok száma x.
Egy siker valószínűsége p.

$$E(x) = \frac{n(1-p)}{p} \qquad D(x) = \frac{\sqrt{n(1-p)}}{p}$$

3.7 Poisson

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

Sok, egymástól független esemény közül kevés következik be, és egy adott időre vett átlagát ismerjük a bekövetkező események számának amit λ-val jelölünk.

$$E(x) = \lambda \qquad D(x) = \sqrt{\lambda}$$

A módusz λ és $\lambda + 1$ ha λ egész, ha nem, akkor λ alsó egészrésze.

4 Folytonos eloszlások

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$f(x)$ a sűrűségfüggvény, $F(x)$ az eloszlásfüggvény.

4.1 Exponenciális

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad T(x) = e^{-\lambda x}$$

Mennyit kell várni az első bekövetkezésig, ha egy bekövetkezés átlagosan λ időnként történik.

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \qquad D(x) = \frac{1}{\lambda}$$

Csak az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal, ami szerint az idő múlásával nem növekszik, és nem csökken a bekövetkezési valószínűség.

$$P(x > s + t \mid x > t) = P(x > s)$$

Lehet egy eloszlás öregedő, azaz idővel nő a bekövetkezés esélye. Pl.:alkatrész kopik, és így nő a bekövetkezés esélye az idő múlásával.

$$P(x > s + t \mid x > t) < P(x > s)$$

Vagy fiatalodó, amikor idővel csökken a bekövetkezés esélye. Pl.:Annak a valószínűsége, hogy a középkorban egy újszülött meghal valami betegségben. (Ahogy öregszik egyre ellenállóbb lesz.)

$$P(x > s + t \mid x > t) > P(x > s)$$

4.2 Gamma

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda x} \qquad F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$$

Mennyi idő múlva lesz az n. bekövetkezés, ha egy bekövetkezés átlagosan λ időnként történik. (Ennek a speciális esete az exponenciális $\lambda = 1$-re.)

$$E(x) = \frac{n}{\lambda} \qquad D(x) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda}$$

4.3 Béta (1 dimenziós)

$$f(x) = \frac{x!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{n-k}$$

A $[0;1]$ intervallumon n random szám közül a k-adik legkisebb eloszlását mutatja. Jó példa, hogy 0 és 1 óra között n ember érkezik, és mennyi az esélye, hogy a k-adik ideér fél órán belül. (Erre a válasz: $\int_0^{0.5} f(x)dx$ miután behelyettesítettünk $f(x)$-be n és k helyére.)

4.4 Standard normális eloszlás

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$$

Ha egy μ várható értékű, és σ szórású eloszlás modellezhető standard normállal:

$$F(X) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Centrális határeloszlás tétel: Ha egy valószínűségi változó sok független valószínűségi változó összegeként áll elő, akkor közelítőleg normális eloszlásúnak vehető μ és σ paraméterekkel.
Speciális eset: **de Moivre-Laplace tétel:** Binomiális eloszlás közelíthető normál eloszlással, ha n nagy, és p se 1-hez, se 0-hoz nincs túl közel.
Ekkor $\mu = n \cdot p$ és $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

4.5 Arkusz-szinusz

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \qquad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot arc\ sin(x) \qquad (-1 < x < 1)$$

4.6 Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \qquad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot arc\ tg(x)$$

5 2 Dimenziós valószínűségi változók

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\ dt\ ds \qquad f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$\textit{Néha fel kell használni:} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx\ dy = 1$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$f(x,y) = f_{2|1}(y|x) \cdot f_1(x) = f_{1|2}(x|y) \cdot f_2(y)$$

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{2|1}(y|x)dy \qquad E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{1|2}(x|y)dx$$

6 Monoton transzformációk

6.1 Egyenesről egyenesre

$$y = t(x) \qquad x = t^{-1}(y) \qquad G(y) = F(t^{-1}(y)) \qquad g(y) = f(t^{-1}(y)) \cdot (t^{-1}(y))'$$

6.2 síkról egyenesre

$$R(z) = \iint_{A_z} f(x,y)\,dx\,dy \qquad r(z) = R'(z)$$

Ahol $R(z)$ az eloszlásfüggvény, $r(z)$ a sűrűségfüggvény az egyenesen.
A_z az a tartomány ahol z értelmes. (Pl. ha $z = x + y$, és $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ akkor $0 < z < 2$. Ekkor az integrálási határok x-re és y-ra vonatkoznak.)

6.3 Síkról síkra

$$(u,v) = t(x,y) \qquad (x,y) = t^{-1}(u,v) = [x(u,v)\ ;\ y(u,v)]$$

$$G(u,v) = F(t^{-1}(u,v))$$

$$g(u,v) = f(t^{-1}(u,v)) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{b} \qquad t^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \underline{b}\right]$$

7 Standard normál eloszlás 2D-ben

$$E(Y|X = x) = \mu_y + r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \mu_x) \qquad D(Y|X = x) = \sigma_y \cdot \sqrt{q - r^2}$$

r a korrelációs együttható.

8 Béta eloszlás 2D-ben

$$f(x) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \cdot x^{i-1} \cdot (y-x)^{j-i-1} \cdot (1-y)^{n-j}$$

n ember érkezik egy egy órás intervallumban, az i-edik és a j-edik vendégek érkezési idejének eloszlását figyeljük.

Tartalomjegyzék