1. feladat — 10 pont

Legyen $z = 2 + 3\imath$ és $w = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\imath$! Adja meg a $z - w$, zw és w^{2015} képzetes részét!

Megoldás: $\operatorname{Im}(z-w) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w = 3 - \sqrt{2}$ **2p.**

$\operatorname{Im} zw = 2\sqrt{2} + 3(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ **3p.**

$|w| = 2$, és $\arg w = \dfrac{3\pi}{4}$

$$w^{2015} = \left(2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \imath \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)^{2015} = 2^{2015}\left(\cos\left(\frac{2015\cdot 3\pi}{4}\right) + \imath\sin\left(\frac{2015\cdot 3\pi}{4}\right)\right) =$$
$$2^{2015}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \imath\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$\operatorname{Im} w^{2015} = 2^{2015}\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -2^{2014.5}$ **5p.**

2. feladat — 4+12 pont

Mondja ki a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tételt!

Vizsgálja az

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}\right)^{2n-1}$$

sorozat limesz inferiorját, limesz szuperiorját, és limeszét!

Megoldás: **Tétel:** Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. **4p.**

$$a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{4n-1} = \left(\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\right)^2\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \to e^2 \cdot 1 = e^2 \quad \textbf{3p.}$$

$$a_{2n-1} = \left(1 + \frac{-1}{2n-1+1}\right)^{2(2n-1)-1} = \left(\left(1 + \frac{-1}{2n}\right)^{2n}\right)^2\left(1 + \frac{-1}{2n-1}\right)^{-3} \to \left(e^{-1}\right)^2 \cdot 1 =$$
e^{-2} **3p.**

Mivel minden index szerepel valamelyik részsorozatban, így csak ez a két torlódási pontja van a sorozatnak. **3p.**

$\liminf a_n = e^{-2}$, $\limsup a_n = e^2$, és $\lim a_n$ nem létezik. **3p.**

3. feladat — 3+3+4+4 pont

Legyen $f(x) = x\ln x$, és $g(x) = x^x$!

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ?$ (b) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = ?$ (c) $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = ?$ (d) $g'(x) = ?$

Megoldás:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty\cdot\infty = \infty$ **3p.**

(b) $$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0 \quad \textbf{3p.}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$, mert e^x folytonos a 0-ban. **4p.**

(d) $$g'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1) \quad \textbf{4p.}$$

4. feladat **4+6+4 pont**

Mondja ki és bizonyítsa be a reciprok függvény deriválási szabályát! Mutasson olyan f és g függvényeket, melyek nem deriválhatók a 0-ban, de hányadosuk igen!

Megoldás: **Tétel:** Ha g deriválható a-ban, és $g(a) \neq 0$, akkor $1/g$ is deriválható, és

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}. \boxed{\textbf{4p.}}$$

Bizonyítás:

$$\text{ha } g(a) \neq 0 \text{, akkor } \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1/g(x) - 1/g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{g(a)-g(x)}{x-a}}{g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \boxed{\textbf{6p.}}$$

Legyen $f(x) = g(x) = |x| + 1$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

5. feladat* **12 pont**

Az $x_0 = -1$-ben tetszőlegesen sokszor deriválható $y(x)$ függvény kielégíti az

$$y^5 + 11y - 5x^2y^3 - x^2 - 12x = 18$$

implicit egyenletet, és $y(-1) = 1$. Milyen lokális szélsőértéke van x_0-ban?

Megoldás: Az egyenlet mindkét oldalát x szerint deriválva az

$$5y^4y' + 11y' - 10xy^3 - 15x^2y^2y' - 2x - 12 = 0 \boxed{\textbf{4p.}}$$

egyenletet kapjuk. $x = -1$ és $y(x) = y(-1) = 1$ helyettesítéssel

$$5y'(1) + 11y'(1) + 10 - 15y'(1) + 2 - 12 = 0,$$

amiből $y'(-1) = 0$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.
Ha újra deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát, akkor

$$20y^3y'y' + 5y^4y'' + 11y'' - 10y^3 - 30xy^2y' - 30xy^2y' - 30x^2yy'y' - 15x^2y^2y'' - 2 = 0 \boxed{\textbf{3p.}}$$

adódik. $x = -1$, $y(x) = y(-1) = 1$ és $y'(x) = y'(-1) = 0$ helyettesítéssel

$$5y''(1) + 11y''(1) - 10 - 15y''(1) - 2 = 0,$$

amiből $y''(1) = 12$ $\boxed{\textbf{1p.}}$, vagyis lokális maximum van x_0-ban $\boxed{\textbf{2p.}}$.

6. feladat* **8+8 pont**

Határozza meg az alábbi integrálokat! (A (b)-nél használja a $t = 1 + \sqrt[3]{x^2}$ helyettesítést!)

(a) $\int (x^2 + x)\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\int \frac{2x}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = ?$ ($t = 1 + \sqrt[3]{x^2}$ helyettesítéssel)

Megoldás:

(a) $$\int \underbrace{(x^2+x)}_{f}\underbrace{\cos(2x+1)}_{g'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{(x^2+x)}_{f}\underbrace{\frac{\sin(2x+1)}{2}}_{g} - \int \underbrace{(2x+1)}_{f'=u}\underbrace{\frac{\sin(2x+1)}{2}}_{g=v'}\,\mathrm{d}x \boxed{\mathbf{3p.}} =$$

$$(x^2+x)\frac{\sin(2x+1)}{2} - \left[\underbrace{(2x+1)}_{u}\cdot\left(\underbrace{-\frac{\cos(2x+1)}{4}}_{v}\right) - \int \underbrace{2}_{u'}\cdot\left(\underbrace{-\frac{\cos(2x+1)}{4}}_{v}\right)\mathrm{d}x\right] \boxed{\mathbf{3p.}} =$$

$$(x^2+x)\frac{\sin(2x+1)}{2} + (2x+1)\frac{\cos(2x+1)}{4} - \frac{\sin(2x+1)}{4} + c \boxed{\mathbf{2p.}}$$

(b) $x = (t-1)^{3/2}$, $\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t$ $\boxed{\mathbf{2p.}}$.

$$\int \frac{2x}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x \boxed{\mathbf{2p.}} = \int \frac{2(t-1)^{3/2}}{t}\frac{3}{2}\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{3(t-1)^2}{t}\,\mathrm{d}t \boxed{\mathbf{2p.}} = \int 3t - 6 + \frac{3}{t}\,\mathrm{d}t = 3\frac{t^2}{2} - 6t + 3\ln t + c = -3\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x^2}) + c \boxed{\mathbf{2p.}}$$

7. feladat* **8 pont**

Határozza meg az $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrált!

Megoldás: $f'f$ alakú integrandus: $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \boxed{\mathbf{4p.}}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\ln^2 \mathrm{e}}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2} \boxed{\mathbf{4p.}}$

8. feladat* **10 pont**

Határozza meg az $\int_{-1}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált!

Megoldás: $f'f$ alakú integrandus: $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin^2 x}{2} + c \boxed{\mathbf{4p.}}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \boxed{\mathbf{2p.}} = \lim_{a\to -1+} \int_{a}^{0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to 1-} \int_{0}^{b} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \boxed{\mathbf{2p.}} = \lim_{a\to -1+}\left[\frac{\arcsin^2 x}{2}\right]_a^0 + \lim_{b\to 1-}\left[\frac{\arcsin^2 x}{2}\right]_0^b =$$

$$\lim_{a\to -1+}\left[\frac{\arcsin^2 0}{2} - \frac{\arcsin^2 a}{2}\right] + \lim_{b\to 1+}\left[\frac{\arcsin^2 b}{2} - \frac{\arcsin^2 0}{2}\right]_0^b = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} \boxed{\mathbf{2p.}} = 0.$$