Valószínűségszámítás vizsga
Műszaki informatikus BSc
2015. május 27.

1. Legyenek A és B események, melyekre

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{2}{5}, \mathbf{P}(A \mid B) = \frac{4}{5}, \mathbf{P}(B \mid A) = \frac{2}{3}.$$

   Mennyi annak valószínűsége, hogy A és B közül legalább az egyik bekövetkezik?
   Megoldás: A keresett valószínűség $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$.
   $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{4}\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}(A) = \frac{3}{2}\mathbf{P}(AB) = \frac{3}{5} \Longrightarrow \mathbf{P}(A+B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$.

2. Legyenek $X \in E(2), Y \in E(1)$ függetlenek. Mennyi $\mathrm{R}(2X - Y, X + 3Y)$?
   Megoldás: $\operatorname{cov}(2X - Y, X + 3Y) = 2\boldsymbol{\sigma}^2 X - 3\boldsymbol{\sigma}^2 Y = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$.
   $\boldsymbol{\sigma}(2X - Y) = \sqrt{4\boldsymbol{\sigma}^2 X + \boldsymbol{\sigma}^2 Y} = \sqrt{2}, \boldsymbol{\sigma}(X + 3Y) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2 X + 9\boldsymbol{\sigma}^2 Y} = \sqrt{\frac{37}{4}}$
   $\mathrm{R}(2X - Y, X + 3Y) = \frac{\operatorname{cov}(2X - Y, X + 3Y)}{\boldsymbol{\sigma}(2X - Y) \cdot \boldsymbol{\sigma}(X + 3Y)} = \frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{37}{2}}} = -\frac{5}{74}\sqrt{74} = -0.58124$

3. Legyen $X \in B\left(100, \frac{1}{50}\right)$ és $Y \in B\left(100, \frac{1}{10}\right)$ függetlenek, $Z = X^2 + 3Y - 2$. Adja meg a $\mathbf{E}(Z \mid X)$ feltételes várható értéket!
   Megoldás: $\mathbf{E}(Z \mid X) = \mathbf{E}\left(X^2 + 3Y - 2 \mid X\right) = \mathbf{E}\left(X^2 \mid X\right) + 3\mathbf{E}(Y \mid X) - 2 = X^2 + 3 \cdot 10 - 2 = X^2 + 28$

4. Három kockával dobunk. Legyen X a dobott összeg, Y a dobott hatosok száma. Mennyi a $\mathbf{P}(X < 3Y)$ valószínűség?
   Megoldás: A teljes valószínűség tételével: $\mathbf{P}(X < 3Y) = \mathbf{P}(X < 3Y \mid Y = 0) \cdot \mathbf{P}(Y = 0) + \mathbf{P}(X < 3Y \mid Y = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 1) + \mathbf{P}(X < 3Y \mid Y = 2) \cdot \mathbf{P}(Y = 2) + \mathbf{P}(X < 3Y \mid Y = 3) \cdot \mathbf{P}(Y = 3)$.
   $\mathbf{P}(Y = i) = \binom{3}{i}\frac{5^{3-i}}{216}, \mathbf{P}(X < 3Y \mid Y = 0) = \mathbf{P}(X < 3Y \mid Y = 1) = \mathbf{P}(X < 3Y \mid Y = 2) = \mathbf{P}(X < 3Y \mid Y = 3) = 0$.
   $\mathbf{P}(X < 3Y) = 0$. A keresett reláció sohasem teljesülhet...

5. Legyen X,Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \alpha(x + y + xy) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

   a.) Adja meg α értékét! b.) Számolja ki X sűrűségfüggvényét! c.) Adja meg a $f_{Y|X}(y \mid x)$ feltételes sűrűségfüggvényt!
   Megoldás: a.) $1 = \alpha \int_0^1 \int_0^1 x + y + xy \,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \alpha \int_0^1 \left(\frac{3y}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\,y = \alpha\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \alpha = \frac{4}{5}$.

b.) $f_X(x) = \frac{4}{5}\int\limits_0^1 x + y + xy \,\mathrm{d}\, y = \frac{4}{5}\left[\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}\right] = 1,2x + 0,4, x \in (0,1)\,.$

c.) $f_{Y|X}\left(y \mid x\right) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y+xy}{\frac{3x}{2}+\frac{1}{2}}, 0 < x < 1, 0 < y < 1.$

6. Mondja ki a homogén Markov láncokra vonatkozó Chapmann-Kolmogorov-tételt!
Megoldás: Ha $\underline{\underline{\Pi}}^{(k)}$ jelöli a ML k-lépéses átmenetvalószínűségi mátrixát, tehát amelynek komponensei
$p_{ij}^{(k)} = \mathbf{P}\left(X_k = j \mid X_0 = i\right)$, akkor $\underline{\underline{\Pi}}^{(n+m)} = \underline{\underline{\Pi}}^{(n)} \cdot \underline{\underline{\Pi}}^{(m)} = \underline{\underline{\Pi}}^{(m)} \cdot \underline{\underline{\Pi}}^{(n)} = \underline{\underline{\Pi}}^{m+n}$.