6. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Mely z komplex számokra igaz, hogy $z + \bar{z} = 2\sqrt{2}$ és $z \cdot \bar{z} = 4$.
MO. Legyen $\operatorname{Re} z = x$ és $\operatorname{Im} z = y$. Ezekkel $x = \sqrt{2}$ és $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 = 2 + y^2 = 4 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\ y^2 = 2 \rightsquigarrow\ y = \pm\sqrt{2} \rightsquigarrow\ z = \sqrt{2}(1 \pm j)$

2. Határozza meg a $P = (1,1,1)$ ponton és az $e:\ x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = -1 + t$ egyenesen átfektetett S sík egyenletét!
MO. Legyen $P' = (1,1,-1) \in e$ és $a = \overline{PP'} = (0,0,2)$, továbbá e irányvektora $v = (1,-1,1)$. S normálvektora $a \times v = (2,2,0)$, így S egyenlete: $2(x-1) + 2(y-1) = 0 \rightsquigarrow\ x + y = 2$.

3. Adjon példát olyan számsorozatra – ha létezik ilyen –, melyre igaz, hogy
(a) nincs véges sűrűsödési értéke (b) egyetlen véges sűrűsödési értéke van és nem konvergens (c) nincs sem véges sem végtelen sűrűsödési értéke (d) nincs végtelen sűrűsödési értéke és nem konvergens
MO. (a) $a_n = n$ b) (a_n) a $b_n = n$ és a $c_n = \frac{1}{n}$ összefésülésével keletkezett sorozat c) ilyen nincs: ha egy sorozat korlátos, akkor van konvergens részsorozata, ha pedig nem korlátos, akkor van végtelenbe divergáló részsorozata d) $a_n = (-1)^n$

4. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n \cdot (1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}) = ?$
MO. $1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} = -\dfrac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \rightsquigarrow\ n \cdot (1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}) = -\dfrac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} -\dfrac{1}{2}$

5. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem? Válaszát indolokolja!
(a) Ha egy függvény felveszi minimumát és maximumát egy korlátos intervallumon, akkor folytonos ott
(b) Ha egy függvény folytonos egy korlátos intervallumon, akkor felveszi minimumát és maximumát ott
(c) Ha egy függvény nem veszi fel sem minimumát sem maximumát egy korlátos intervallumon, akkor nem korlátos ott (d) Ha egy függvény nem korlátos egy korlátos intervallumon, akkor vagy minimumát vagy maximumát nem veszi fel ott
MO. a) nem: $f(x) = \operatorname{sign} x$ a $[-1,1]$–en , b) nem: $f(x) = x$ a $(-1,1)$–en. c) nem: $f(x) = x$ a $(-1,1)$–en. d) igaz, ellenkező esetben az intervallumon: $\min f(x) = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = \max f(x)$.

6. Legyen $f(x) = x|x|$. Határozza meg az f' deriváltfüggvényt, ahol az létezik, és állapítsa meg, hol deriválható az f' deriváltfüggvény .
MO. $f(x) = -x^2$ ha $x < 0$ és $f(x) = x^2$ ha $x \ge 0$, így $f'(x) = -2x$ ha $x < 0$, $f'(0) = 0 \left(\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x|x| - 0}{x} = \right.$
$\left. = |x| \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0\right)$ és $f'(x) = 2x$ ha $x > 0$ azaz $f'(x) = 2|x|$ így f' az origóban nem, az origó kivételével azonban mindenütt deriválható.

7. Bizonyítsa be, hogy az $y = e^x$ egyenletű görbe $x = 1$ pontbeli érintője átmegy az origón!
MO. Az érintő egyenlete: $y - e = e(x - 1) \rightsquigarrow\ y = ex$, mely átmegy az origón.

8.
$\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx = ?$
MO. $t = e^x$–el $x = \ln t,\ dx = \dfrac{dt}{t} \rightsquigarrow\ \displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx = \int \frac{t}{1 + t} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{1 + t}\, dt = \ln|1 + t| = \ln(1 + e^x)$