A2-Matematika, 3.vizsga

2011. június 9.

1. feladat Keressük meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix rangját. Hány dimenziós teret alkot az $Ax = 0$ egyenletrendszer összes megoldása?

2. feladat Határozzuk meg az

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

függvény origóbeli $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ iránymenti deriváltját! Írjuk fel a függvény $P_0(1, 0)$ ponthoz tartozó érintősíkjának az egyenletét!

3. feladat Határozzuk meg a $\int\int_T xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ integrál értékét, ahol a T tartomány a $(2, 0)$ középpontú 2 sugarú körlap x tengely fölé eső része.

4. feladat Számoljuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^{n+1}}$$

hatványsor összegfüggvényét és konvergenciatartományát!

5. feladat Legyen $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 2, 0, 1)$. Adjunk meg olyan e_3, e_4 vektorokat, hogy e_1, e_2, e_3, e_4 ortogonális bázist alkosson $\mathbf{R}^4$-ben és fejtsük ki a $v = (1, 2, 1, 0)$ vektort ebben a bázisban.

6. feladat Igazak-e az alábbi állítások:
(a1) Ha a $\sum(a_{2n}+a_{2n+1})$ zárójelezett sor konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens.
(a2) Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\sum(a_{2n} + a_{2n+1})$ is konvergens.
(a3) Ha $a_n \geq 0$, de $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ nem létezik, akkor $\sum a_n$ divergens.
(b) Legyen $f(x, y)$ folytonos a korlátos zárt A tartományon.
(b1) Ha a gradiensvektor sehol sem nulla, akkor nincs f-nek maximumhelye az A halmazon.
(b2) Ha f differenciálható A belső pontjaiban és egy belső (x_0, y_0) pontban

$$\det \begin{pmatrix} f"_{xx} & f"_{xy} \\ f"_{xy} & f"_{yy} \end{pmatrix} < 0$$

akkor nincs (x_0, y_0)-ban maximumhely.
(c) Az $(1, 1, \sqrt{2})$ pont gömbi koordinátái $r = 2$, $\varphi = \pi/4$, $\theta = \pi/3$.