1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2010 nyár A2

1. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Van-e, és ha igen, hány olyan $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ vektor van, melyre $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$. Ha van ilyen vektor, határozzon meg egyet!

MO. $\underline{\underline{A}}$ invertálható: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 4p

tehát van egyetlen megfelelő vektor: $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 6p

10p

2. Legyen az **A** operátor az y tengelyre való tükrözés és a **B** operátor az $y = x$ egyenesre való vetítés a síkon. Határozza meg minden $n \geq 0$ egészre az $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^n$ operátor mátrixát a sík szokásos bázisában!

MO. Legyen $e = (i, j)$ a sík szokásos bázisa.

$n = 0$: Ekkor definícióból az operátor az identitás, így mátrixa az identitásmátrix. 2p

$n = 1$: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}}_e = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_e \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}_e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 4p

$n > 1$: Mivel $\mathrm{Im}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ az $y = -x$ egyenes, mely merőleges az $y = x$ egyenesre,

$\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = 0 \rightsquigarrow \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 = 0 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^n = 0$ ha $n > 1 \rightsquigarrow \underline{\underline{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^n}}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 4p

10p

3. Legyen $f(x, y) = \dfrac{x^2\,y^2}{x^2 + y^2}$ az origón kívül, $f(0, 0) = 0$.

Folytonosak–e az f parciális deriváltjai az origóban? Döntse el, hogy deriválható–e itt a függvény!

MO.

Igen, mert $f_x(x, y) = \dfrac{2\,x\,y^4}{(x^2 + y^2)^2}$ az origón kívül és $f_x(0, 0) = 0$ hiszen $f(x, 0) = 0$ minden x-re. 4p

Másrészt $|f_x(x, y)| \leq \left|\dfrac{2x\,y^4}{(y^2)^2}\right| = 2\,|x| \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$. Mivel a függvény invariáns az $x - y$ cserére,

a másik eset analóg. 4p

Mindkét parciális folytonos az origóban, amiből pedig következik, hogy a függvény deriválható itt. 2p

10p

4. Legyen $K = \{\,(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\,\}$. $\displaystyle\int\!\!\int_K xy\,dx\,dy = ?$

MO. Polárkoordinátákkal: $\displaystyle\int\!\!\int_K xy\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^2 r\cdot r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\,dr\,d\varphi =$ 6p

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^2 r^3\cdot\sin 2\varphi\,dr\,d\varphi = -\cos 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0$$ 4p

(Persze, hisz a függvény a nyeregfelület, melynek az $[xy]$ sík alatti és feletti része origóközepű körszimmetrikus tartományon azonos.)

10p

Folytatás a következő oldalon.

5.

(a) Bizonyítsa be, hogy az $f_n(x) = \dfrac{3nx^3}{nx^2+1}$ sorozat egyenletesen konvergens az $[1,2]$ intervallumon!

(b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \displaystyle\int_1^2 f_n(x)\,dx = ?$

MO.

(a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = \dfrac{3x^3}{x^2} = 3x \quad \rightsquigarrow$ **3p**

$r_n(x) = f_n(x) - 3x = \dfrac{3nx^3}{nx^2+1} - 3x = -\dfrac{3x}{nx^2+1} \quad \rightsquigarrow \quad |r_n(x)| \le \dfrac{6}{n+1} \longrightarrow 0$ ha $1 \le x \le 2$, azaz a maradék majorálható az $[1,2]$-n egy 0-hoz tartó numerikus sorozattal: egyenletesen konvergens itt **4p**

(b) (a) miatt a limes és az integrál felcserélhető, tehát

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx = \int_1^2 \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^2 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{3}{2}(4-1) = \tfrac{9}{2}.$$ **3p**

10p

6.

(a) Melyik igaz egy véges dimenziós lineáris téren:

(a1) Minden generátorrendszer kibővíthető bázissá

(a2) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(b) Legyen T a sík egy zárt korlátos részhalmaza és legyen f tetszőleges T-n folytonos kétváltozós függvény. Igaz-e:

(b1) f felvesz T-n minden két T-n felvett értéke közötti értéket

(b2) f felveszi T-n a szélsőértékeit.

(c) Igaz-e, hogy ha az $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor konvergenciasugara R, akkor a sor

(c1) konvergens minden a $[-R,R]$-en

(c2) egyenletesen konvergens a $(-R,R)$-en.

MO.

(a1) Nem: ha nem lineárisan független, bővítéssel sem válik azzá. **1p**
(a2) Igen **1p**
(b1) Nem: ha T nem összefüggő, akkor lehetséges, hogy nem **3p**
(b2) Igen: Weierstrass tétel **1p**
(c1) Nem: pl. $\sum x^n$. **2p**
(c2) Nem: pl. $\sum x^n$. **2p**

10p