ANALÍZIS(2) **VIZSGADOLGOZAT I. rész** **2002. június 20.**

Műszaki informatika szak B változat Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

$y' = x^3 + 2y^2$

a) Írja fel az n-edrendű Taylor-polinom definícióját.

b) Az x_0 = -2 pontnak van olyan környezete, melyben az y(-2) = 2 kezdetiérték probléma egyértelműen megoldható.
A differenciálegyenlet megoldása nélkül határozza meg ezen k.é.p. megoldásának x_0-beli harmadfokú Taylor-polinomját.

2. feladat (12 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{3x^2}{x^3+5} y = (x^3+5)^2$$

3. feladat (15 pont)

a) Adjon elégséges feltételt függvénysor egyenletes konvergenciájára!
Mondja ki a függvénysor tagonkénti deriválhatóságával kapcsolatos tételt!

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2xn + n^2\sqrt{n})}{n^3+8}$$

Mutassa meg, hogy a függvénysor **R**-en egyenletesen konvergens és tagonként deriválható!

4. feladat (16 pont)

Adja meg az alábbi függvények megadott bázispontú Taylor-sorát és annak konv. tartományát!

a) $f(x) = 3x\,\mathrm{sh}(2x^2), x_0 = 0$

b) $g(x) = \frac{1}{5-x}, x_0 = -3$

c)

$$h(x) = \frac{(x+3)^2}{3-x}, x_0 = -3$$

5. feladat (8 pont)

Legyen f m-változós függvény.

a) Adja meg a totális deriválhatóság és a parciális deriválhatóság definícióját!

b) Bizonyítsa be, hogy a parciális deriváltak létezése szükséges feltétele a totális deriválhatóságnak (belső pontban)!

6. feladat (11 pont)*

a) Írja le polárkoordinátákkal a T tartományt.

$T: x^2 + y^2 \le 5, y \le 0$

b)

$$\iint_T \mathrm{sh}(2x^2+2y^2)\,dxdy=?$$

7. feladat (10 pont)*

a) Milyen geometriai transzformációt létesít a $w = az + b$ lineáris egész leképezés, ahol a és b adott komplex számok? Indokoljon!

b) Mibe viszi át a Re $z < 0$ tartományt az $f(z) = (-1-j)z + 2j$ függvény?

8. feladat (17 pont)*

$$f_1(z)=\frac{\sin 3z}{z-5j},\ f_2(z)=5(1-\bar{z}),\ a:\ \oint_{|z-1|=1} f_1(z)dz=?,\ b:\ \oint_{|z-1|=10} f_1(z)dz=?,\ c:\ \oint_{|z-1|=1} f_2(z)dz=?$$

d) Definiálja a komplex vonalintegrál fogalmát!

ANALÍZIS(2) **VIZSGADOLGOZAT II. rész** **2002. június 20.**

Műszaki informatika szak B változat Munkaidő: 60 perc

BME, Természettudományi kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (20 pont)

a) Írja fel a harmadrendű, konstans együtthatós homogén lineáris difegyenlet általános alakját!

Mutassa meg, hogy van $e^{\lambda x}$ alakú megoldása!

Ha $y(x) = y_1(x) + j\,y_2(x)$ komplex megoldása a diffegyenletnek, akkor hogyan juthatunk valós megoldáshoz? (Indokoljon!)

Írja fel a harmadrendű differenciálegyenlet általános megoldását komplex konjugált gyökpár esetén!

b) $y'' + 4y' + (2 + a^2)\,y = 0$, *a valós*

Az a paraméter értékének függvényében írja fel a megoldást!

2. feladat (25 pont)

$$f_n(x)=\frac{x^2}{3n+2x^2}$$

a) Írja fel a határfüggvényt!

Egyenletesen konvergens a függvénysorozat a [0,3] illetve a [0, végtelen] intervallumon!

b) Igaz-e az alábbi állítás?

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^3 f_n(x)dx=\int_0^3 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

3. feladat (18 pont)

Milyen alakú egy valós változós hatványsor konvergenciatartománya?

Mit állíthatunk, ha tudjuk, hogy x_1-ben konvergens? Mit állíthatunk, ha tudjuk, hogy x_2-ben divergens? Bizonyítson!

4. feladat (13 pont)

a) Mi az a trigonometrikus rendszer és mit értünk azalatt, hogy ortogonális?

b) Mi a kapcsolat az egyenletesen konvergens $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k \sin kx$

trigonometrikus sor összegfüggvénye és az a_k, b_k együtthatók között?

5. feladat (13 pont)
Sorolja fel a kétváltozós függvény lokális szélsőértéke létezésével kapcsolatos tételeket!
Van- lokális szélsőértéke az $f(x,y) = (x+y)^3 y^2$ függvénynek?

6. feladat (9 pont)
Definiálja az *ln z* függvényt, és vezesse le a kiszámítására szolgáló képletet!