Valószínűségszámítás zárthelyi dolgozat
Műszaki informatika szak
2012. április 20.

1. A vizsgázók 70%-a A szakos, 10%-a B szakos és 20%-a C szakos. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy hallgató ötöst kap, az A szakosok esetében $0,5$, a B szakosoknál $0,4$, és a C szakosoknál $0,2$. Ha egy személyről tudjuk, hogy ötösre vizsgázott, akkor milyen valószínűséggel lehet A szakos?

   Megoldás: Jelölje D azt az eseményt, hogy egy hallgató ötöst kap. $\mathbf{P}(A) = 0,7; \mathbf{P}(B) = 0,1; \mathbf{P}(C) = 0,2; \mathbf{P}(D \mid A) = 0,5; \mathbf{P}(D \mid B) = 0,4;$ $\mathbf{P}(D \mid C) = 0,2.$
   A Bayes-tételből: $\mathbf{P}(A \mid D) = \frac{\mathbf{P}(D|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(D|A)\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(D|B)\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(D|C)\mathbf{P}(C)} =$ $\frac{0,5\cdot 0,7}{0,5\cdot 0,7+0,4\cdot 0,1+0,2\cdot 0,2} = \frac{35}{35+4+4} \approx 0,81.$

2. Az egységnégyzeten egymástól függetlenül kiválasztunk 8 pontot. Ezek közül vegyük azt, amelyik legközelebb esik az origóhoz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a legrövidebb távolság $\frac{1}{2}$-nél kisebb?

   Megoldás: Jelölje egy tetszőleges pont koordinátáit (u, v)!
   $\sqrt{u^2 + v^2} < 0,5$ akkor teljesül, ha a pont beleesik az origó középponttú $0,5$ sugarú negyedkörbe. Ennek valószínűsége $\frac{\pi}{16}$. Annak valószínűsége, hogy egyik pont sem lesz közelebb az origóhoz, mint $0,5 : p = \left(1 - \frac{\pi}{16}\right)^8$. Ennek ellentett eseménye az, hogy lesz olyan pont, amelyik közelebb esik az origóhoz, mint $0,5$, tehát a legközelebbi távolság is kisebb lesz, mint $0,5$. Tehát a keresett valószínűség: $1 - p = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{16}\right)^8$.

3. Legyen $X \in E(2)$ és $Y = X^2$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!

   Megoldás: $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(X^2 < t\right) = \mathbf{P}\left(X < \sqrt{t}\right) =$
   $= 1 - e^{-2\sqrt{t}}, t > 0.$
   Deriválva: $f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-2\sqrt{t}}, t > 0.$
   $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X^2 = \boldsymbol{\sigma}^2 X + (\mathbf{E}X)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

4. Legyen $X \in U(0, 4)$ és $Z = (X - 2)^2$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(Z \geq 6) \leq \frac{2}{9}$!

   Megoldás: A Markov-egyenlőtlenségből:
   $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X^2 - 4\mathbf{E}X + 4 = \frac{16}{12} + 4 - 4 \cdot 2 + 4 = \frac{4}{3},$
   $\mathbf{P}(Z \geq 6) \leq \frac{2}{9}.$

5. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

   Megoldás: Ha $X \in N(0,1)$, akkor $\mathbf{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,309$.
   Ha $X \in U(a,b)$, akkor $\mathbf{E}X = \frac{a+b}{2} = 0, \boldsymbol{\sigma}X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = 1$, azaz
   $b = -a = \sqrt{3}$.
   Ekkor $\mathbf{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \approx 0,356$. Tehát az egyenletes eloszlás esetén kapunk nagyobb valószínűséget.

Valószínűségszámítás zárthelyi dolgozat

Műszaki informatika szak

2012. április 20.

1. A vizsgázók 55%-a A szakos, 35%-a B szakos és 10%-a C szakos. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy hallgató ötöst kap, az A szakosok esetében $0,7$, a B szakosoknál $0,4$, és a C szakosoknál $0,1$. Ha egy személyről tudjuk, hogy ötösre vizsgázott, akkor milyen valószínűséggel lehet B szakos?

   Megoldás: Jelölje D azt az eseményt, hogy egy hallgató ötöst kap. $\mathbf{P}(A) = 0,55; \mathbf{P}(B) = 0,35; \mathbf{P}(C) = 0,1; \mathbf{P}(D \mid A) = 0,7;$ $\mathbf{P}(D \mid B) = 0,4; \mathbf{P}(D \mid C) = 0,1.$
   A Bayes-tételből: $\mathbf{P}(B \mid D) = \frac{\mathbf{P}(D|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(D|A)\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(D|B)\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(D|C)\mathbf{P}(C)} = \frac{0,4\cdot 0,35}{0,55\cdot 0,7+0,4\cdot 0,35+0,1\cdot 0,1} = \frac{14}{38,5+14+1} \approx 0,26.$

2. Az egységnégyzeten egymástól függetlenül kiválasztunk 10 pontot. Ezek közül vegyük azt, amelyik legközelebb esik az origóhoz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a legrövidebb távolság $\frac{1}{3}$-nál kisebb?

   Megoldás: Jelölje egy tetszőleges pont koordinátáit (u, v)!
   $\sqrt{u^2+v^2} < \frac{1}{3}$ akkor teljesül, ha a pont beleesik az origó középponttú $\frac{1}{3}$ sugarú negyedkörbe. Ennek valószínűsége $\frac{\pi}{36}$. Annak valószínűsége, hogy egyik pont sem lesz közelebb az origóhoz, mint $\frac{1}{3}$: $p = \left(1 - \frac{\pi}{36}\right)^{10}$. Ennek ellentett eseménye az, hogy lesz olyan pont, amelyik közelebb esik az origóhoz, mint $\frac{1}{3}$, tehát a legközelebbi távolság is kisebb lesz, mint $\frac{1}{3}$. Tehát a keresett valószínűség: $1 - p = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{36}\right)^{10}$.

3. Legyen $X \in E(1)$ és $Y = 1 - X^2$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!

   Megoldás: $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(1 - X^2 < t\right) = \mathbf{P}\left(X > \sqrt{1-t}\right) =$
   $= 1 - \left(1 - e^{-\sqrt{1-t}}\right), t < 1.$
   Deriválva: $f_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{1-t}} e^{-\sqrt{1-t}}, t < 1.$
   $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\left(1 - X^2\right) = 1 - \left(\boldsymbol{\sigma}^2 X + (\mathbf{E}X)^2\right) = 1 - 1 - 1 = -1.$

4. Legyen $X \in U(0,2)$ és $Z = (X-1)^2$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(Z \geq 3) \leq \frac{1}{9}$!

   Megoldás: A Markov-egyenlőtlenségből:
   $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X^2 - 2\mathbf{E}X + 1 = \frac{4}{12} + 1 - 2 \cdot 1 + 1 = \frac{1}{3},$
   $\mathbf{P}(Z \geq 3) \leq \frac{1}{9}.$

5. Egy X valószínűségi változó várható értéke 1, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása exponenciális, vagy akkor, ha egyenletes?

   Megoldás: Ha $X \in E(\lambda)$, akkor $\lambda = 1$.
   $\mathbf{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) = 0,606.$
   Ha $X \in U(a, b)$, akkor $\frac{a+b}{2} = 1$, $\frac{b-a}{\sqrt{12}} = 1$, azaz $b = 1 + \sqrt{3}, a = 1 - \sqrt{3}$.
   $\mathbf{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{2} - 1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 0,644$. Tehát az egyenletes eloszlás esetán nagyobb rá az esély.