1. Vizsgazárthelyi

2011 nyár A2

1. Legyen az $\mathbf{A}$ operátor a síkon az x tengelyre való vetítés, a $\mathbf{B}$ pedig az y tengelyre való tükrözés. Határozza meg a következő operátorok mag- és képterét:

$$\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{A}^2,\ \mathbf{B}^2,\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B},\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}.$$

2. Vannak-e $\mathbf{R}^3$–nak olyan e és f bázisai, hogy az e-ről az f-re való áttérés mátrixa

$$\underline{\underline{A}}_{ef} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha igen, adjon meg ilyen bázisokat!

3. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$ az origón kívül, $f(0,0)=0$. Folytonosak-e az f parciális deriváltjai az origóban? Döntse el, hogy deriválható-e itt a függvény!

4. Számítsa ki annak a síktartománynak a területét, mely az $x = y^4$ és az $x = 32 - y^4$ parabolák közé esik!

5. Legyen $f(x) = \dfrac{\frac{e^x-1}{x} - 1}{x}$ minden $x \neq 0$ esetén.

(a) Folytonossá tehető-e f az origóban, és ha igen, mennyi a folytonosított változat értéke itt?

(b) Ha f folytonossá tehető az origóban, akkor deriválható-e a folytonosított változat itt, és ha igen, mennyi a derivált értéke itt?

6.

(a) Igaz-e egy tetszőleges $n \times n$-es mátrix esetén, hogy

(a1) pontosan akkor invertálható, ha oszlop- és sorrangja megegyezik,

(a2) pontosan akkor invertálható, ha oszlopvektorai között van olyan, amely lineárisan független a többi oszlopvektortól.

(b) Legyen f a síkon mindenütt értelmezett kétváltozós függvény, $a \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges. Igaz-e, hogy

(b1) ha f-nek létezik határértéke bármely a-n átmenő egyenes mentén, akkor f-nek létezik határértéke a-ban,

(b2) ha tetszőleges e egységvektor esetén f-nek létezik az e irányú iránymenti deriváltja a-ban, akkor f-nek mind x mind y szerinti parciális deriváltjai léteznek az a-ban.

(c) Legyen $a_n > 0$ minden n-re. Igaz-e, hogy

(c1) ha $\sum(-1)^n a_n$ numerikus sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ is konvergens,

(c2) ha a $\sum a_n$ numerikus sor konvergens, akkor a $\sum(-1)^n a_n$ is konvergens.