AZ IMPULZUSMEGMARADÁS

Eddie Shown 90 mérföldes sebességgel hajtott
A motor leállt, de Ed csak ment tovább.

Anonim szerző

8.1 Bevezetés

Az előző fejezetben a mechanikai energia megmaradásának a tételét tárgyaltuk, ami konzervatív rendszerekben érvényes. A tétel nagyon hatékony a mechanikai rendszerek viselkedésének elemzésében. Eredményességének az az oka, hogy a kölcsönhatásban szereplő erőket nem kell minden részletükben meghatároznunk – a mechanikai energia megmaradásának tétele *minden* konzervatív rendszerben igaz, még ha nem is ismerjük pontosan a rendszerben ható erőket.

E fejezetben egy másik hasonlóan jól alkalmazható tételről lesz szó: az *impulzusmegmaradás* tételéről. Ez a tétel még általánosabb, mint az energiamegmaradás tétele, mert *minden* folyamatra igaz függetlenül attól, hogy konzervatív vagy nem-konzervatív a rendszer.

Az energiára és az impulzusra vonatkozó megmaradási tételek segítségével a folyamatokat a testek *helyzetének,* és *sebességének* ismeretében írhatjuk le. Ezzel szemben a Newton törvényekkel való leíráskor az *erőket* és *gyorsulásokat* használjuk. Hasznos megjegyezni e megkülönböztető jegyeket, hiszen adott probléma megoldásakor a kezdeti információk határozzák meg, hogy melyik módszert érdemes használni. Természetesen néhány probléma teljes elemzéséhez mind a Newton-törvényeket, mind pedig a megmaradási tételeket fel kell használnunk.

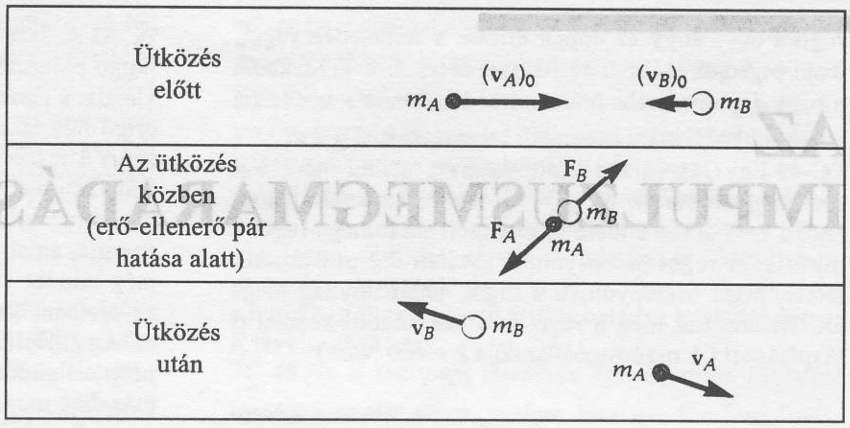
8.2 Az impulusmegmaradás

Tekintsük az m_A és m_B tömegű részecskék ütközését. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a részecskék vízszintes síkon súrlódásmentesen mozoghatnak, így vízszintes irányú mozgásukat csak a két részecske között ható erő befolyásolja. A 8-1 ábrán a két részecske látható, amint közeledik egymáshoz, ütközik, majd szétválik. A „0" indexszel a *kezdeti* értékeket, a index nélküli betűkkel pedig az ütközés *utáni* állapot jellemzőit jelöljük.

Newton harmadik törvénye alapján:

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B \qquad \textbf{(8-1)}$$

ahol $\mathbf{F}_A$ az m_A tömegű és $\mathbf{F}_B$ az m_B tömegű részecskére ható erőt jelöli.



8-1 ábra
Vízszintes súrlódásmentes síkon ütköző testek

Newton második törvénye szerint az **F** erő megegyezik az (m**v**) impulzus idő szerinti deriváltjával, (lásd az V. fejezet 5.5 pontját):

$$\frac{d}{dt}(m_A \mathbf{v}_A) = -\frac{d}{dt}(m_B \mathbf{v}_B)$$

ahol $\mathbf{v}_A$ az m_A, tömegű és $\mathbf{v}_B$ az m_B tömegű részecske sebessége. Vezessük be a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ jelölést, ezzel:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A) = -\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_B)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A) + \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_B) = 0 \qquad \text{(8-2)}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = 0$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy az impulzusok ($\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$) vektori összege az ütközés során nem változik, azaz:

$$(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)$$

az időtől független állandó. A kezdeti értékeket „0" indexszel, a tetszőleges t időponthoz tartozó értékeket index nélkül jelölve a következőt kapjuk:

Az impulzus megmaradás törvénye (zárt rendszer esetén)

$$\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p} \qquad \text{(8-3)}$$

E tétel minden zárt rendszerre igaz, legyen az két összeütköző billiárdgolyó, vagy 10^{12} számú csillagból álló galaxis. A tétel akkor is igaz marad, ha nem konzervatív erők (például súrlódási erő) is hatnak. Az egyetlen elengedhetetlen feltétel, hogy a rendszer zárt, azaz a rendszerre ható *külső* erők eredője zérus legyen.

Mivel az összefüggés *vektor*egyenlet, ebből következik, hogy az impulzusmegmaradás az egyes *komponensekre* külön-külön is igaz. (A tétel természetesen csak inerciarendszerben érvényes.) Az A és B részecskék ütközésekor – a derékszögű koordinátarendszert alkalmazva – a következő egyenletekhez jutunk:

x irányú komponensekre: $(p_{Ax})_0+(p_{Bx})_0 = p_{Ax}+p_{Bx}$

y irányú komponensekre: $(p_{Ay})_0+(p_{By})_0 = p_{Ay}+p_{By}$ **(8-4)**

z irányú komponensekre: $(p_{Az})_0+(p_{Bz})_0 = p_{Az}+p_{Bz}$

Itt $(p_{Ax})_0$ a $\mathbf{p}_A$ erő x irányú komponensét jelenti az ütközés előtt, és így tovább. A feladatok megoldásakor általában minden komponensre felírjuk a (8-4) skaláregyenleteket.

Az impulzusmegmaradás törvénye bármely inerciarendszerből szemlélve érvényes. Természetesen, például két részecske ütközése esetén, két különböző sebességű vonatkoztatási rendszerbeli megfigyelő más és más kezdeti és végállapotbeli impulzusokat észlel. Mindketten úgy találják azonban, hogy az impulzusmegmaradás tétele érvényes.

8-1 PÉLDA

Egy 4 kg-os test 3 m/s kezdeti sebességgel vízszintes síkon, súrlódásmentesen mozog, s egy másik 2 kg-os eredetileg nyugalomban lévő testtel ütközik, ütközés után a testek együtt mozognak (8-2 ábra). Határozzuk meg a két egymáshoz tapadt test ütközés utáni közös sebességét.

MEGOLDÁS

Mivel kezdeti impulzusa csak a 4 kg-os testnek van, az ütközés után a két test összimpulzusának nagysága és iránya megegyezik a kezdeti impulzussal. Így az ütközés egydimenziósnak tekinthető. Válasszuk a az x koordináta pozitív irányának megfelelően az ütközés előtti impulzus irányát, és vezessük be a következő jelöléseket:

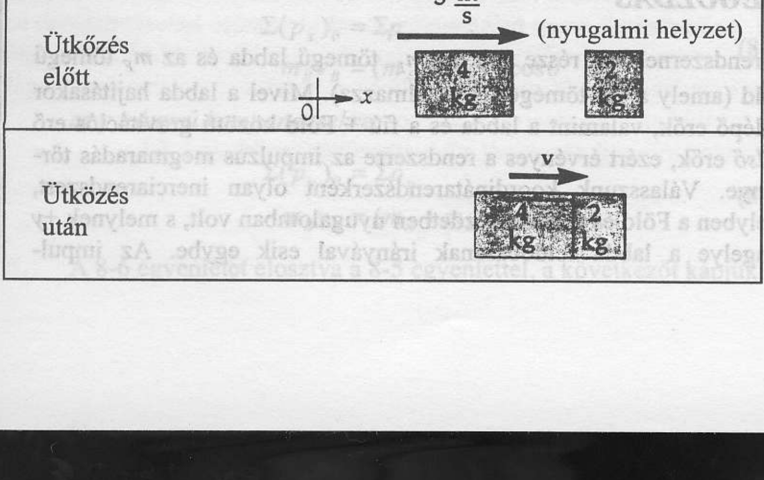
Ütközés előtt	Ütközés után
$m_A = 4\text{kg}$ $\quad (v_A)_0 = 3\text{m/s}$ $m_B = 2\text{kg}$ $\quad (v_B)_0 = 0$	Az ütközés után a két test sebessége azonos $v_A = v_B = v$

Az impulzusmegmaradás törvényét felírva az x koordinátára, azt kapjuk, hogy:

$$\Sigma(p_x)_0 = \Sigma p_x$$

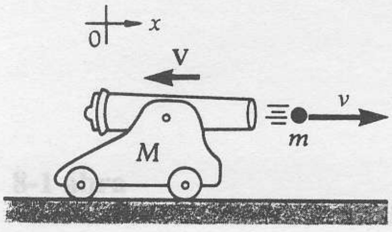
$$(m_A v_A)_0 + (m_B v_B)_0 = (m_A + m_B)v$$

innen:



8-2 ábra
A 8-1 példához

$$v = \frac{(m_A v_A)_0 + (m_B v_B)_0}{(m_A + m_B)} = \frac{(4\,\text{kg})\left(3\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (2\,\text{kg})(0)}{(4\,\text{kg} + 2\,\text{kg})} = 2{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



8-3 ábra
A 8-2 példához

8-2 PÉLDA

Egy kalózhajó fedélzetén egy 7500 N súlyú görgökre szerelt ágyú található (8-3 ábra). Az ágyú 100 N súlyú golyót lő ki 90 m/s kezdeti sebességgel. Határozzuk meg mekkora sebességgel lökődik vissza az ágyú, feltéve, hogy a görgök súrlódása elhanyagolható.

MEGOLDÁS

A golyóból és az ágyúból álló rendszer zárt, hiszen semmiféle külső vízszintes erő nem hat rá. Így az összimpulzus a lövés előtt és után meg kell, hogy egyezzen. A 8-3 ábra jelöléseit használva a tömegek a következők:

$$M = \frac{W}{g} = \frac{7500\,\text{N}}{10\,\text{m/s}^2} = 750\,\text{kg}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{100\,\text{N}}{10\,\text{m/s}^2} = 10\,\text{kg}$$

Az impulzusmegmaradás törvényét felírva az x irányra, azt kapjuk, hogy:

$$\Sigma(p_x)_0 = \Sigma p_x$$

$$0 = MV + mv$$

$$V = -\frac{mv}{M} = -\frac{(10\,\text{kg})(90\,\text{m/s})}{750\,\text{kg}} = -1{,}2\,\text{m/s}$$

A negatív előjel arra utal, hogy az ágyú a golyóval ellentétes, azaz $-x$ irányban lökődik vissza.

8-3 PÉLDA

Egy fiú a Föld felszínén egy labdát függőlegesen feldob. Határozzuk meg Föld és a labda kinetikus energiájának arányát abban a pillanatban, amikor a fiú elengedi a labdát:

$$\frac{K_{Föld}}{K_{Labda}} = \frac{\frac{1}{2} m_F v_F^2}{\frac{1}{2} m_L v_L^2}$$

MEGOLDÁS

A rendszernek két része van: az m_L tömegű labda és az m_F tömegű Föld (amely a fiú tömegét is tartalmazza). Mivel a labda hajításakor fellépő erők, valamint a labda és a fiú + Föld közötti gravitációs erő *belső* erők, ezért érvényes a rendszerre az impulzus megmaradás törvénye. Válasszunk koordinátarendszerként olyan inerciarendszert, melyben a Föld és a labda kezdetben nyugalomban volt, s melynek $+y$ tengelye a labda feldobásának irányával esik egybe. Az impulzusmegmaradás törvényéből meghatározható a v_F/v_L sebességarány.

$$\Sigma(p_y)_0 = \Sigma p$$
$$0 = m_L v_L + m_F v_F$$
$$\frac{v_F}{v_L} = -\frac{m_L}{m_F}$$

Az így számított értéket behelyettesítve a kinetikus energiák arányának kifejezésébe, a következőt kapjuk:

$$\frac{K_F}{K_L} = \frac{\frac{1}{2} m_F v_F^2}{\frac{1}{2} m_L v_L^2} = \frac{m_F}{m_L}\left(\frac{v_F}{v_L}\right)^2 = \frac{m_F}{m_L}\left(-\frac{m_L}{m_F}\right)^2 = \frac{m_L}{m_F}$$

Helyettesítsünk be néhány számadatot a fenti eredménybe. Tételezzük fel, hogy a labda tömege 0,6 kg. Mivel a Föld tömege kb. 6×10^{24} kg, a kinetikus energiák arányára $\sim 10^{-25}$ adódik. Így azt mondhatjuk, hogy a Föld a labdához képest elhanyagolhatóan kicsiny kinetikus energiát kap. Ez az oka tehát annak, hogy amikor a 7. fejezetben egy feldobott test potenciális energiájának változását tárgyaltuk, akkor a Föld kinetikus energiájának változását tudatosan elhanyagoltuk. Mindig tudatában kell lennünk azonban annak, hogy a potenciális energia az adott *rendszer* egészének sajátossága, nem pedig egyetlen részecskéhez rendelt mennyiség, és sok esetben nem tekinthetünk el attól, hogy az energián a rendszer minden egyes alkotórésze osztozik. Jegyezzük meg mindazonáltal, hogy a feldobott labda felfelé mutató impulzusának nagysága *éppen akkora,* mint amekkora a Föld lefelé irányuló impulzusának nagysága.

8-4 PÉLDA

Az A és B korcsolyázó merőleges irányból közeledik egymás felé. Az A korcsolyázó tömege $m_A = 50$ kg, s az x koordináta pozitív irányában 2 m/s sebességgel halad. A B korcsolyázó tömege $m_B = 70$kg, és 1,5 m/s sebességgel az y koordináta pozitív irányában korcsolyázik. Összeütköznek, majd együtt mennek tovább. (a) Határozzuk meg a korcsolyázók együttes sebességét az ütközés után. (b) Határozzuk meg az ütközés közben végbemenő kinetikus energia változásának az eredeti kinetikus energiához képest vett $(\Delta K/K_0)$ arányát.

MEGOLDÁS

a) A 8-4 ábra jelöléseit használva írjuk fel az impulzusmegmaradás törvényét a két komponensre, a komponenseket jelöljük x, ill. y indexszel.

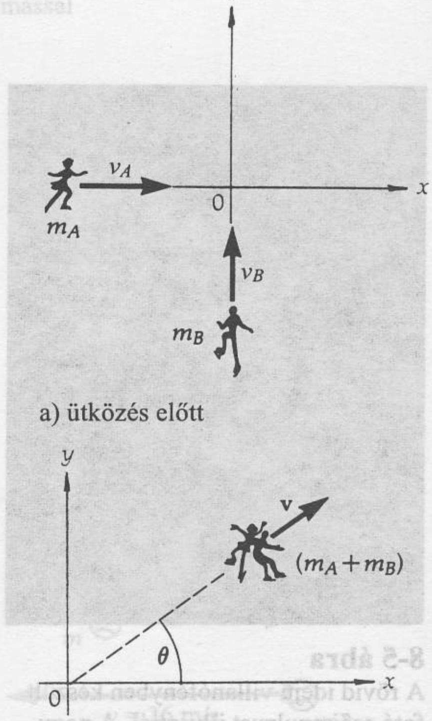
az x irányrú komponensekre:

$$\Sigma(p_x)_0 = \Sigma p_x$$
$$m_B v_B = (m_A + m_B)\, v \cos\theta \qquad \text{(8-5)}$$

az y irányrú komponensekre:

$$\Sigma(p_y)_0 = \Sigma p_y$$
$$m_B v_B = (m_A + m_B)\, v \sin\theta \qquad \text{(8-6)}$$

A 8-6 egyenletet elosztva a 8-5 egyenlettel, a következőt kapjuk:



8-4 ábra
A 8-4 példához

$$\frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{\cancel{(m_A+m_B)}\cancel{v}\sin\theta}{\cancel{(m_A+m_B)}\cancel{v}\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \mathrm{tg}\,\theta$$

$$\theta = \mathrm{arc\,tg}\left[\frac{(70\ \mathrm{kg})(1{,}5\ \mathrm{m/s})}{(50\ \mathrm{kg})(2\ \mathrm{m/s})}\right] = \mathrm{arc\,tg}(1{,}05) = 46{,}4^\circ$$

Az így számított θ szöget visszahelyettesítve a 8-5 egyenletbe meghatározhatjuk a v együttes sebességet az ütközés után:

$$v = \frac{m_A v_A}{(m_A+m_B)\cos\theta} = \frac{(50\ \mathrm{kg})\left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{(50\ \mathrm{kg}+70\ \mathrm{kg})(\cos 46{,}4^0)} = 1{,}21\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(b) A kinetikus energia relatív változása az ütközés során:

$$\left(\frac{\Delta K}{K_0}\right) = \left(\frac{K-K_0}{K_0}\right) = \left(\frac{K}{K_0}-1\right)$$

ahol

$$K_0 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$$
$$= \frac{1}{2}(50\ \mathrm{kg})\left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \frac{1}{2}(70\ \mathrm{kg})\left(1{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 179\ \mathrm{J}$$

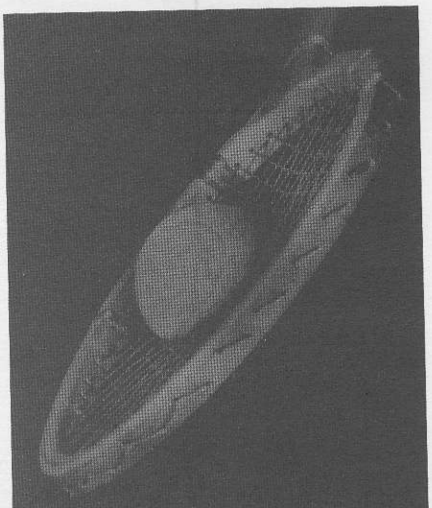
és

$$K = \frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2$$
$$= \frac{1}{2}(50\ \mathrm{kg}+70\ \mathrm{kg})\left(1{,}21\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 87{,}6\ \mathrm{J}$$

Így

$$\left(\frac{K}{K_0}-1\right) = \left(\frac{87{,}6}{179}-1\right) = -0{,}511$$

A negatív előjel arra utal, hogy a kinetikus energia egy része az ütközés során elvész. A „hiányzó” energia az ütközéskor a korcsolyázók izommunkája ellenében ható belső munka.



8-5 ábra
A rövid idejű villanófényben készült fotó erőimpulzust illusztrál. A nagymértékű alakváltozás jelzi, hogy a teniszütő és a labda között nagy erők ébrednek.

8.3 Az erőimpulzus

Newton második törvénye szerint a testre ható erők eredője minden időpontban megegyezik a test impulzusváltozásának sebességével. Sok esetben, pl. az ütközések, vagy más nagyon rövid ideig tartó kölcsönhatások során az erők nem ismerhetők meg pontosan. Relatíve könnyebben határozható meg az impulzusváltozás nagysága. Ebben a fejezetben az impulzus fogalmának további alkalmazásaival foglalkozunk.

Newton második törvényét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\mathbf{F} = \frac{d\,\mathbf{p}}{d\,t}$$

Innen integrálással (lásd függelék G-lll) a következőt kapjuk:

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\,\mathbf{p} \qquad \text{(8-7)}$$

ahol $\mathbf{p}_0$ a t_0 kezdeti időpontbeli meglevő impulzus (közvetlenül a kölcsönhatás előtt), és $\mathbf{p}$ a t időpontbeli, végimpulzus (közvetlenül a kölcsönhatás után.) Az egyenlet jobb oldalán levő integrál éppen az impulzusváltozás: $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p}$.

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt = \Delta\mathbf{p} \qquad \text{(8-8)}$$

A bal oldali integrált **erőimpulzusnak** nevezzük. Az erőimpulzust az $\mathbf{F}(t)$ görbéje alatti terület adja a kölcsönhatás időtartama alatt (8-6 ábra). Vegyük észre, hogy az erőimpulzus *vektormennyiség*, s iránya azonos a $\Delta\mathbf{p}$ impulzusváltozás irányával.

Erőimpulzus
$$\underbrace{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt}_{\text{Erőimpullzus}} = \underbrace{\Delta\mathbf{p}}_{\text{Impulzusváltozás}} \qquad \text{(8-9)}$$

Példaként tekintsük a baseball-labda megütésének folyamatát. (8-7 ábra) Az ütő és a labda ütközésének Δt ideje nagyon rövid, tán néhány ezredmásodperc. Valójában az erőidőbeli változását ábrázoló görbe a 8-6 ábra $F(t)$ függvényéhez hasonlít. Mivel az $F(t)$ függvény tényleges menetét nagyon nehéz meghatározni, ezért hasznos egy (konstans) $F_á$ *átlagerőt*[1] bevezetni, amely ugyanolyan hosszú Δt ideig hat és ugyanazt az *impulzusváltozást* hozza létre, mint a valódi erő. A 8-6, ill. 8-7 ábrák alatti területek azonosak. (Természetesen a valódi erő egy nagyon rövid ideig sokkal nagyobb is lehet, mint $F_á$).

Erőimpulzus
$$\underbrace{\mathbf{F}_á \Delta t}_{\text{Erőimpulzus}} = \underbrace{\Delta\mathbf{p}}_{\text{Impulzusváltozás}} \qquad \text{(8-10)}$$

Az erőimpulzus SI mértékegysége Ns.

8-5 PÉLDA

A W = 1,5 N súlyú, 25 m/s sebességgel vízszintesen repülő baseball labdát úgy ütjük meg, hogy az ütés után 38 m/s sebességgel ellenkező irányban mozog. Feltételezve, hogy az ütő 2 ms ideig van kapcsolatban a labdával, határozzuk meg a labdára ható átlagerőt.

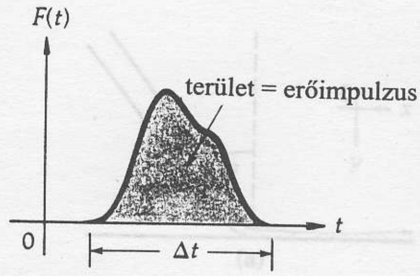
MEGOLDÁS

A kölcsönhatás ideje olyan rövid, hogy a gravitációs erő a labda impulzusában csak elhanyagolható változást okoz az ütközés alatt. Így

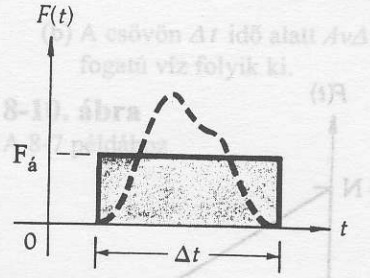
[1] A $\Delta t = t - t_0$ időtartamra vonatkozó $\mathbf{F}_á$ átlagos erőt matematikailag az

$$\mathbf{F}_á = \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt\right] = \frac{\text{erőimpulzus}}{\Delta t}$$ összefüggéssel definiáljuk.

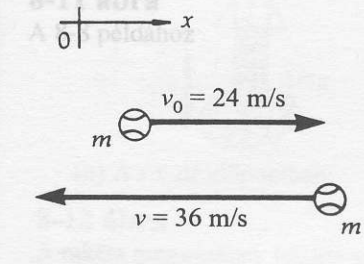
Így $\mathbf{F}_á \Delta t$ = erőimpulzus.



8-6 ábra
A labda és az ütő közötti ütközés során fellépő *F(t)* erő időfüggése. A Δt ideig tartó kölcsönhatás alatt bekövetkező erőimpulzus a görbe alatti (satírozott) területtel adható meg.



8-7 ábra
Az $F_á$ átlagos erő a Δt idő alatt ugyanakkora erőimpulzust hozna létre, mint a 8-6 ábrán látható erő, mivel a két görbe alatti terület egyenlő egymással



8-8 ábra
A 8-5 példához

feltehetjük, hogy csak az ütő fejt ki erőt a labdára. Elsőként számítsuk ki a labda tömegét:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{1{,}5\,\mathrm{N}}{10\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}15\,\mathrm{kg}$$

Válasszuk az x tengely pozitív irányául a labda kezdeti sebességének az irányát, így:

$$p_0 = mv_0 = 0{,}15\,\mathrm{kg}\cdot 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3{,}75\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (+x \text{ irányban})$$

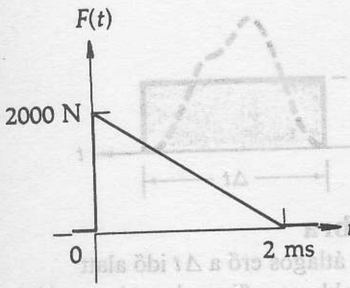
$$p = mv = 0{,}15\,\mathrm{kg}\cdot 38\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5{,}7\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (-x \text{ irányban})$$

Most alkalmazzuk a 8-10 egyenletet:

$$F_á \Delta t = \Delta p$$

innen

$$F_á = \frac{p - p_0}{\Delta t} = \frac{(-5{,}7 - 3{,}75)\,\mathrm{kg}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}002\,\mathrm{s}} = -4725\,\mathrm{N} \qquad (-x \text{ irányban})$$



8-9 ábra
A 8-6 példához

8-6 PÉLDA

Egy 0,045 kg-os golflabdát elütnek. Tételezzük fel, hogy az ütő által a labdára gyakorolt erő az ütközés ideje alatt lineárisan csökken (8-9 ábra). Határozzuk meg a labda sebességét, amikor éppen elhagyja a golfütő fejét.

MEGOLDÁS

Használjuk fel a (8-9) egyenletet:

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt = mv - mv_0$$

Az erőimpulzus számértékben megegyezik az $F(t)$ görbe alatti területtel. Mivel az $F(t)$ görbe lineáris, ezért 2000 N, ill. 0,002 s.

$$\text{Erőimpulzus} = 1/2(2000\ \mathrm{N})(0{,}002\ \mathrm{s}) = 2{,}00\ \mathrm{Ns}$$

Egy Newton egy [kg·m/s²]-tel egyezik meg, ezért az erőimpulzus 2 kg·m/s. Így:

$$\text{Erőimpulzus} = \Delta \mathbf{p}$$

$$2{,}00\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = mv - mv_0$$

$$v = \frac{2{,}00\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{m} + mv_0 = \frac{2{,}00\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}045\,\mathrm{kg}} + 0 = 44{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

8.4 Folytonosan változó impulzus

Befejezésül tekintsünk néhány példát, melyben az impulzus folytonosan változik. A legtöbb ilyen problémát úgy a legegyszerűbb megoldani, ha a rövid idő alatt bekövetkező változásokat vizsgáljuk.

8-7 PÉLDA

Vízsugarat síkfelületre irányítunk úgy, hogy a sugár θ szöget zár be a felület normálisával. (8-10 ábra) A fecskendőt elhagyó vízsugár sebessége v, keresztmetszete A, és a víz sűrűsége ρ. A folyadék szétterül a sík felszínén. Szükségképpen, amikor a vízsugár becsapódik a felületbe, sebességének felülettel párhuzamos komponense nem változik, a normális komponens viszont zérusra csökken. Határozzuk meg vízsugár által a síkra gyakorolt (és a felületre merőleges) átlagos erőt.

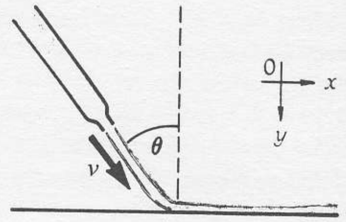
MEGOLDÁS

A 8-10b ábráról leolvasható, hogy Δt idő alatt,

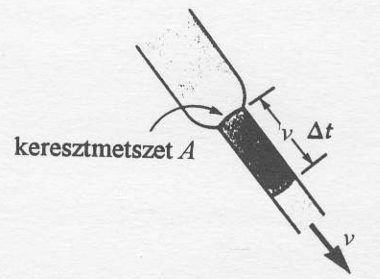
A felületre érkező víz térfogata	(térfogat) $=Av\Delta t$
Ugyanezen vízmennyiség tömege	(sűrűség)(térfogat) $=\rho Av\Delta t$
E víztömeg p impulzusa	$(mv) = \rho Av^2\Delta t$

Az ábrán feltüntetett derékszögű koordinátákat bevezetve, normális irányú erő csak az impulzus y irányú komponenséből adódik. Az impulzus y komponense merőleges a felületre és $\rho\ Av^2\Delta t\cos\theta$-val egyenlő. Newton harmadik törvény értelmében amíg a víz y irányú impulzus összetevőjét zérusra csökkenti a lap ugyanakkora normális irányú erőt fejt ki a vízsugárra, , mint amekkora normális irányú erővel hat a vízsugár a lapra.

$$F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{p_y - (p_y)_0}{\Delta t} = \frac{\rho Av^2\Delta t\cos\theta - 0}{\Delta t} = \rho Av^2\cos\theta$$

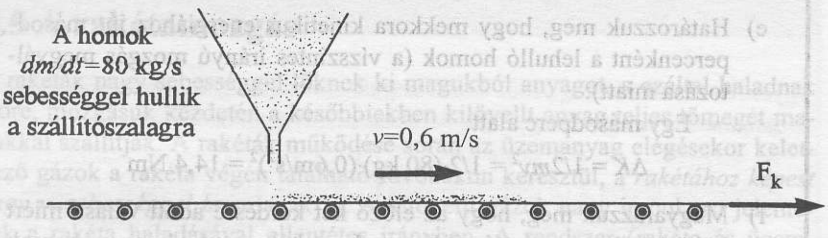


(a)

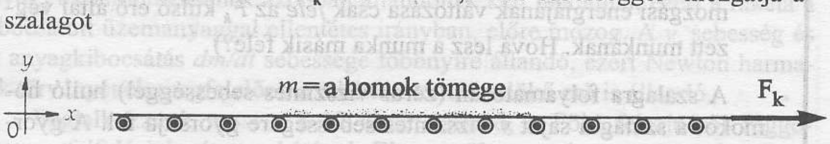


(b) A csövön Δt idő alatt $Av\Delta t$ térfogatú víz folyik ki.

8-10. ábra
A 8-7 példához



(a) A homok hullása alatt az F_k külső erő 0,6 m/s sebességgel mozgatja a szalagot



(b) A rendszert a szalagon a szalag sebességével mozgó m tömegű homok alkotja. Ilymódon a rendszer m tömege az időben lineárisan növekszik.

8-11 ábra
A 8-8 példához

8-8 PÉLDA

A szállítószalag. Egy 0,6 m/s sebességgel mozgó vízszintes szállítószalagra a 8-11a ábrán látható módon egy kiöntőgaratból másodpercenként 80 kg homok hullik. Tegyük fel, hogy a szalag vízszintes irányú külső erő hatására súrlódásmentesen mozog a görgőin.

a) Határozzuk meg, hogy milyen sebességgel változik a homok vízszintes irányú impulzusösszetevője. (Az impulzus függőleges irányú összetevőjének változását a szállítószalag és az alátámasztó görgök biztosítják, ezzel azonban most nem foglalkozunk.)

Másodpercenként 80 kg homok gyorsul fel zérus kezdősebességről 0,6 m/s sebességre. Így az impulzusváltozás sebessége:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t}=\frac{p_x-(p_x)_0}{\Delta t}=\frac{80\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}-0}{1\,\mathrm{s}}=48\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}$$

b) Határozzuk meg, hogy mekkora f súrlódási erőt fejt ki a szalag a homokra a gyorsítás során.

Newton második törvénye szerint:

$$f=\frac{\Delta p_x}{\Delta t}=48\,\mathrm{N} \qquad \text{(jobb oldal irányába)}$$

c) Határozzuk meg, hogy mekkora F_k külső erőnek kell a szalagra hatnia, hogy egyenletesen mozogjon. (Ezt az erőt a szalagot mozgató motor fejti ki.)

Newton harmadik törvénye szerint, minthogy a szalag a homokra jobbfelé mutató F erőt fejt ki, ugyanekkora balra mutató erővel hat a homok a szalagra. Ahhoz, hogy a szalag egyenletesen mozogjon, a rá ható erők F_x eredőjének zérusnak kell lennie. Ily módon a motornak

$$F_k=48\,\mathrm{N} \qquad \text{(jobb oldal irányába)}$$

erőt kell kifejteni a szállítószalagra.

d) Határozzuk meg, hogy mennyi munkát végez az F_k erő egy másodperc alatt.

Az F_k erő 0,6 m-t mozgat másodpercenként, így

$$\Delta W=F\Delta x=48\cdot 0{,}6=24{,}8\ \mathrm{Nm}$$

e) Határozzuk meg, hogy mekkora kinetikus energiához jut másodpercenként a lehulló homok (a vízszintes irányú mozgás megváltozása miatt):

Egy másodperc alatt:

$$\Delta K=1/2mv^2=1/2\cdot(80\ \mathrm{kg})\cdot(0{,}6\mathrm{m/s}^2)^2=14{,}4\ \mathrm{Nm}$$

f) Magyarázzuk meg, hogy az előző két kérdésre adott válasz miért különbözik egymástól. (Mi az oka tehát annak, hogy a homok mozgási energiájának változása csak *fele* az F_k külső erő által végzett munkának. Hová lesz a munka másik fele?)

A szalagra folyamatosan (zérus vízszintes sebességgel) hulló homokot a szalag a saját v vízszintes sebességére gyorsítja fel. A gyorsulás során *szükségszerű*, hogy a homokszemek és a szalag elcsússzanak egymáshoz képest, hiszen a homok a gyorsítási folyamat során kisebb sebességgel mozog, mint a szalag. (Amikor a homokszemek elérik a szalag sebességét, akkor nincs szükség többé vízszintes irányú erőre a v sebességű egyenletes mozgás fenntartásához.) A 8C-47 feladat megoldása világosan megmutatja, hogy akár 1 s akár 0,01 s vagy tetszőleges más időtartam alatt megy végbe a gyorsulási folyamat, az „elvesző” mechanikai munka mindig pontosan egyenlő a súrlódás miatt fejlődő hővel. (Útmutatás: A súrlódási erő munkájának kiszámításakor vegyük figyelembe, hogy a súrlódási erő a szállítószalag és a homokszemek közötti *relatív* elmozdulás által meghatározott úton hat.)

Az „elveszõ” energia a Newton törvények segítségével is meghatározható. Koordinátarendszerként használjuk a Földhöz rögzített koordinátarendszert, a vizsgált „rendszer” pedig legyen a *szalagon a szalag sebességével mozgó homoktömeg* (8-11b ábra). A rendszerben lévő homok pillanatnyi m tömege állandó dm/dt mértékben növekszik az idő függvényében. A tömeg változása miatt a rendszer $p_x = mv$ impulzuskomponense is folytonosan változik. Így

$$\Sigma F_x = \frac{dp_x}{dt}$$

$$F_k = \frac{d}{dt}[mv] = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v$$

Az $m(dv/dt)$ tag a rendszernek a szállítószalag gyorsulásából adódó impulzusváltozáshoz szükséges erőt adja. Esetünkben a szállítószalag gyorsulása zérus, így ez a tag nem lép fel az egyenletben, azaz

$$F_k = (dm/dt)v$$

Ennek az erőnek a teljesítménye pedig:

$$\text{Teljesítmény} = F_k v = [(dm/dt)v]v = \frac{d}{dt}\left(mv^2\right),$$

ami átírható:

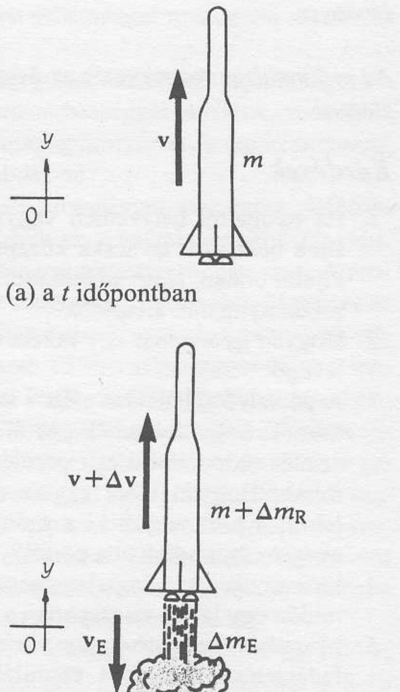
$$\text{Teljesítmény} = 2\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = 2\frac{dK}{dt}$$

Látható tehát, hogy a motor által a rendszerbe táplált teljesítmény a homok kinetikus energiája változásának a kétszerese. A kapott eredmény teljesen általános, hiszen a folyamat lezajlásának Δt idejére semmiféle feltevést sem tettünk.

8.5 A rakétamozgás

A rakéták nagy sebességgel löknek ki magukból anyagot, s ezáltal haladnak előre, mozgásuk kezdetén a későbbiekben kilövellt anyag teljes tömegét magukkal szállítják. A rakéták működése során az üzemanyag elégésekor keletkező gázok a rakéta végén található fúvókákon keresztül, a *rakétához képest nagy v_r sebességgel* áramlanak ki. A kilövellt gázok nagy impulzust jelentenek a rakéta haladásával ellentétes irányban. A rendszer (rakéta és üzemanyag) összimpulzusának azonban állandónak kell maradnia, ezért a rakéta a kibocsátott üzemanyaggal ellentétes irányban, előre mozog. A v_r sebesség és az anyagkibocsátás dm/dt sebessége többnyire állandó, ezért Newton harmadik törvényének megfelelően a rakétatestet előre lökő erő is állandó.

Foglalkozzunk most a 8-12 ábrán látható, a Föld felszínéről függőlegesen felfelé irányított rakétával. Elemezzük a rendszer (rakéta és üzemanyag) mozgását a Földhöz rögzített és inerciarendszernek tekinthető koordinátarendszerből. Tegyük fel továbbá, hogy g állandó és a légellenállás elhanyagolható[2]. Az a) ábrán mutatott időpontban legyen a rakéta sebessége v, a rakétatest és az üzemanyag együttes tömege pedig m. A tömeg Δt idő alatt csökkenjen Δm_R -rel. A rakéta tömegének Δm_R tömegcsökkenése megegyezik



(a) a t időpontban

(b) A $t + \Delta t$ időpontban

8-12 ábra
A rakéta mozgásának leírása a Földhöz rögzített és inercia-rendszernek tekintett koordináta-rendszerből

[2] Valójában a légellenállás, különösen a Föld közelében és nagy sebességeknél jelentős hatású. Természetesen a levegő jelenléte nem szükséges a rakétamotorok működéséhez. A motorok az űrben éppolyan tolóerőt fejtenek ki, mint a Föld közelében.

a kibocsátott hajtóanyag tömegének Δm_E növekményével, ez a tömeg lövell ki a fúvókákon keresztül a *rakétatesthez képest* függőlegesen lefelé v_r sebességgel. A folyamat során a rakéta tömege $m + \Delta m_R$-re, sebessége pedig $v + \Delta v$-re változik. (Vegyük észre, hogy Δm_R tömegcsökkenést jelent, tehát negatív mennyiség.) A kibocsátott üzemanyagnak a Földhöz képest vett v_E sebességét a rakéta Földhöz viszonyított v sebességének és a hajtóanyag rakétához képest vett v_r relatív sebességének a különbsége adja:

$$v_E = v - v_r \tag{8-11}$$

Alkalmazzuk most a rendszerre a Newton második törvényének az megfogalmazott alakját, mely szerint a külső erőktől származó erőlökés megegyezik a rendszer impulzusának megváltozásával. A rendszerre ható egyetlen külső erő a lefelé mutató mg erő. A mozgás egydimenziós, válasszuk a felfelé mutató irányt pozitívnak.

$$\text{Erőimpulzus} = \text{Impulzusváltozás}$$

$$F_k \Delta t = [\text{végállapot impulzusa}] - [\text{kezdeti állapot impulzusa}] \tag{8-12}$$

$$-mg\Delta t = \left[\underbrace{(m + \Delta m_R)(v + \Delta v)}_{\textit{rakéta}} + \underbrace{\Delta m_E (v - v_r)}_{\textit{kibocsátott gáz}}\right] - [mv]$$

Mivel $\Delta m_E = -\Delta m_R$ a (8-12) egyenlet a

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{m}(v_r - \Delta v)\frac{\Delta m_R}{\Delta t} - g$$

alakra egyszerűsíthető. Mivel Δt zérushoz tart, ezért $\Delta v/\Delta t$ a gyorsuláshoz tart. Mivel pedig, Δv zérushoz továbbá a $\Delta m_R/\Delta t$ különbségi hányados a dm/dt deriválthoz tart, határértékben a rakéta $a = dv/dt$ gyorsulása a

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g \tag{8-13}$$

egyenlettel adható meg, ahol dm/dt negatív mennyiség és a rakéta tömegváltozásának sebességével egyenlő. A rakéta akkor gyorsul felfelé, ha

$$\frac{v_r}{m}\left|\frac{dm}{dt}\right| > g$$

illetve ha a $v_r|dm/dt|$ un. *effektív lökés* nagyobb, mint a rakétatest mg súlya. A *Saturn V* rakéta esetén amellyel az amerikai űrhajósok a Holdra szálltak a motorok tolóereje negyvenmillió newton volt.

A (8-13) egyenlet integrálásával könnyen meghatározhatjuk a rakéta sebességének időbeli változását is. Amennyiben a rakéta a $t = 0$ időpontban nyugalomból indul, akkor

$$\int_0^v dv = -v_r \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} - g\int_0^t dt \tag{8-14}$$

Elvégezve az integrálást (Függelék G-III), azt kapjuk, hogy

$$v = v_r \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt \quad \text{(feltéve, hogy g állandó)} \tag{8-15}$$

A g állandóságára tett feltevés viszonylag rossz közelítés, hiszen a Földtől 160 km magasságban a gravitációs gyorsulás kb. 5%-kal kisebb, mint a Föld felszínén.

Abban a tartományban, ahol g elhanyagolhatóan kicsiny (vagy egy vízszintes sínen mozgó rakétaszánkó mozgásának vizsgálatakor, ahol a gravitációs erőnek nincs jelentősége), a sebességre vonatkozó összefüggés nagyon egyszerűvé válik:

$$v = v_r \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \quad \text{(gravitáció nincsen)} \qquad \textbf{(8-16)}$$

A képlet mutatja, hogy a rakéta által elérhető maximális sebességet, tehát a teljes üzemanyagmennyiség elégetése után elért sebességet az $m_0/m_ü$ tömegarány szabja meg, ahol m_0 a rakéta kezdeti, $m_ü$ pedig a teljes üzemanyagmennyiség elégetése utáni üres tömege. A (8-16) összefüggés rámutat a rakétatervezés két fontos faktorára; a végsebesség akkor lesz a legnagyobb, ha a) az üzemanyag a fúvókákon át a lehető legnagyobb v_r sebességgel áramlik ki, b) ha a tömegarányt olyan naggyá tesszük, amennyire csak lehetséges. Sajnos azonban az $m_ü$ végső tömegben az üzemanyagtartályok és a motor holt tömege mellett a hasznos terhet is tartalmazza, ezért a tömegarány egy adott határnál tovább nem növelhető. Emiatt a modern rakéták többfokozatúak, s az egyes fokozatokban további kisebb rakéták képezik a hasznos terhelést. Amikor egy rakétafokozat fűtőanyaga elfogyott, akkor beindul a következő fokozat és az előző haszontalan terhelése leválik.

A sugárhajtású motor hajtóművein a rakétákhoz hasonlóan égés során keletkező anyag áramlik ki nagy sebességgel. A rakétákkal szemben azonban a sugárhajtású gépek nem visznek magukkal oxidálószert, hanem a levegőből használnak fel nagymennyiségű oxigént az üzemanyag elégetéséhez. Így, ha a sugárhajtású repülőgépek mozgását elemezzük, akkor figyelembe kell venni a rendszer tömegében a beszívott levegőt, valamint a beszívásakor ébredő erőket is.

8-9 PÉLDA

Egy függőlegesen indított rakéta jellemző adatai a következők: Kezdeti tömeg: 15 000 kg, ebből az üzemanyag 10 000 kg. Az hajtóanyag kiáramlási sebessége $v_r = 2{,}5\cdot 10^3$ m/s, az égési idő 60 s. Tegyük fel továbbá, hogy g értéke állandó. Határozzuk meg a) a rakéta sebességét az üzemanyag elégetése után, b) a gyorsulást az indítás pillanatában.

MEGOLDÁS

a) Használjuk fel a (8-15) összefüggést

$$v_{végső} = v_r \ln\left(\frac{m_0}{m_ü}\right) - gt$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$v_{végső} = \left(2{,}5\cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\ln\left(\frac{15000\,\text{kg}}{5000\,\text{kg}}\right) - \left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(60\,\text{s})$$

$$v_{végső} = 2{,}16\cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) A gyorsulás $a = dv/dt$, így a (8-13) egyenlet szerint

$$a = -\frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g$$

Figyelembe véve, hogy *dm/dt* negatív szám (*dm* a rendszer tömegének csökkenését jelenti), azt kapjuk, hogy

$$a = \left(\frac{2{,}5\cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\cdot 10^3\,\text{kg}}\right)\left(\frac{-10^4\,\text{kg}}{60\ \text{s}}\right) - 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 73{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{(körülbelül 7,5 g)}$$

Összefoglalás

Zárt rendszerben (amelyre ható külső erők eredője zérus) a $\Sigma \mathbf{p}$ összimpulzus időben állandó.

Az impulzus-megmaradás törvénye $\qquad \Sigma\mathbf{p}_0 = \Sigma\mathbf{p}$

Amennyiben külső erők nem hatnak, akkor ez a törvény – függetlenül attól, hogy a mechanikai energia megmarad vagy sem, – *mindig* érvényes. A $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzus vektormennyiség. Többdimenziós mozgások esetén a megmaradási tétel az egyes összetevőkre külön-külön is érvényes.

Az *erőimpulzus* megegyezik az összimpulzus megváltozásával

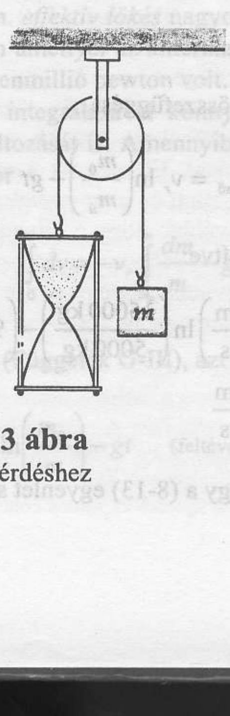
$$\underbrace{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt}_{\text{erőimpulzus}} = \underbrace{\Delta\mathbf{p}}_{\text{impulzus-változás}}$$

Két részecske pillanatszerű ütközése során az $\mathbf{F}(t)$ függvény pontos alakját általában nem ismerjük. Feltéve azonban, hogy a kölcsönhatás Δt ideig tart, meghatározhatunk egy állandó $\mathbf{F}_{\text{átl}}$ átlagos erőt, amely a Δt idő alatt ugyanakkora impulzusváltozást hozna létre.

$$\underbrace{\mathbf{F}_{\text{átl}}\Delta t}_{\text{erőimpulzus}} = \underbrace{\Delta\mathbf{p}}_{\text{impulzus-változás}}$$

Kérdések

1. Ha nyugalmi helyzetben vagyunk egy tökéletesen sima befagyott tavacska közepéről, hogyan tudunk kijutni onnan. Hogyan juthattunk eredetileg a tó közepén nyugalmi állapotba?
2. Hogyan gyorsulhat egy rakéta az űrben, ahol nincs levegő.
3. A porszívó feltalálása előtt a szőnyegeket úgy tisztították, hogy átvetették egy állványra erősített vízszintes rúdon, majd egy porolóval csapkodva kiporolták. Hogyan lehet ezt az eljárást pontosabban leírni; a port verjük ki a szőnyegből, vagy a szőnyeget csapkodjuk el a portól?
4. Elemezzük az impulzusmegmaradás folyamatát midőn egy labda visszapattan a falról
5. Mozgásba hozható-e egy vitorláshajó úgy, hogy a fedélzetén elhelyezett ventillátorral légáramot fújunk a vitorláira[3]?
6. Egy eredetileg nyugalomban lévő vasúti pőrekocsi platóján két ember áll. Ha egymásután, a kocsihoz képest ugyanakkora sebességgel külön-külön ugranak le a kocsiról, akkor a kocsi nagyobb sebességre tesz szert, mintha egyszerre ugranának le. Miért?



8-13 ábra
7. kérdéshez

[3] Nem várt választ ad a kérdésre Robert Beck Clark „A válasz nyilvánvaló nemde?" c. cikkében (The Physics Teacher 24 (jan. 1980) 39. old.)

7. Lezárt torkú homokórát a 8-13 ábrán látható módon egy állócsigán kiegyensúlyoztunk úgy, hogy a homok az óra felső részében volt. (A csiga súrlódásmentes.) Ezután szabaddá tettük a homok útját. a) Vajon a homok kifolyásának megnyitása után, de mielőtt a homok elérné a homokóra alját, fennmarad-e az egyensúlyi helyzet? b) Miközben homok folyik le és felhalmozódik az alsó részben, egyensúlyban marad-e a homokóra? Ha nem, mekkora a gyorsulás? Ha pedig az egyensúly fennáll, akkor lesz-e sebessége a homokórának? c) Határozzuk meg a homokóra mozgásállapotát, miután a teljes homokmennyiség lefolyt. Ha a homokóra mozog, akkor írjuk le a mozgást, ha pedig nyugalomban van, akkor adjuk meg, hogy hol helyezkedik el a kiindulási helyzetéhez képest.
8. Egy dugót vízzel teli edény alján, teljesen a vízbe merülve fonallal rögzítettünk. Az eredményt egy mérleg egyik serpenyőjébe téve, kiegyensúlyozzuk azt azonos m tömeggel a másik serpenyőben. Mi történik, ha a fonal elszakad és *a dugó a vízben felfelé mozog?* Egyensúlyban marad-e a mérleg, vagy elbillen valamerre?

Feladatok

8.2 Az impulzusmegmaradás törvénye

8A-1 Egy 40 N súlyú pisztollyal 5 g tömegű golyót lőttünk ki a Földhöz képest 1000 m/s sebességgel. Mekkora sebességgel lökődött vissza a fegyver?

8A-2 Két 20, ill. 30 kg tömegű fiú összekepaszkodva áll egy befagyott tó jegén, majd úgy lökik el egymást, hogy a 20 kg tömegű fiú 2 m/s sebességre tesz szert. Feltéve, hogy a súrlódás elhanyagolható, a) határozzuk meg a 30 kg tömegű fiú sebességét, b) mekkora lesz a fiúk impulzusa?

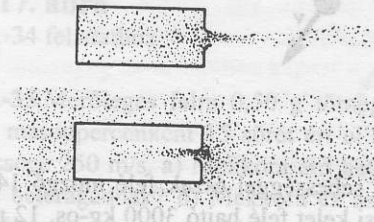
8A-3 Egy 7,5 kg tömegű test 4 m/s sebességgel vízszintes, súrlódásmentes felületen csúszik és centrálisan ütközik egy eredetileg nyugalomban lévő 10 kg tömegű testtel. Ütközés után a testek összeragadnak. Mekkora a kinetikus energia veszteség az ütközés során?

8A-4 Egy m tömegű v_0 sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia $(K - K_0)/K_0$ relatív megváltozását.

8A-5 Egy 200 tonnás tehervonat szerelvény 8 km/h sebességgel begurul egy alagútba és ott ütközik és összekapcsolódik egy 25 tonnás tehervagonnal. A szerelvény 6 km/h sebességgel lép ki az alagútból. Mekkora sebességgel és milyen irányban mozgott a 25 tonnás vagon ütközés előtt az alagútban?

8A-6 Légpárnás sínen egy 3 kg és egy 4 kg tömegű kiskocsit tartunk nyugalomban. A kocsik között egy elhanyagolható tömegű összenyomott rugó van. A kiskocsik nincsenek a rugóhoz kötve. Ezután elengedjük a kiskocsikat. Milyen sebességgel mozog a 4 kg tömegű kocsi, ha tudjuk, hogy a 3 kg-os kocsi 4 m/s sebességre tesz szert.

9. Ha egy sűrített levegővel teli kapszulát a 8-14 ábrán látható módon kiszúrunk, akkor a levegő jobbfelé kiáramlik belőle, s emiatt a kapszula rakétaszerűen balfelé mozog. Mi történik, ha egy eredetileg nyugalomban légüres kapszulát szúrunk ki? A 8-14 ábrának megfelelően a tartályba belépő levegő balfelé áramlik. Miután a kapszulába beáramlik a levegő, az jobbra vagy balra kezd-e mozogni? Esetleg nyugalomban marad[4]?



8-14 ábra
9. kérdéshez

10. Fogalmazzuk át a fejezet mottóját úgy, hogy pontosan kifejezze azt a gondolatot, amire az idézet vonatkozik

8A-7 Egy 10^4 kg tömegű üres tehervagon 1,2 m/s sebességgel vízszintes sínen gurul és egy megrakott $2 \cdot 10^4$ kg tömegű vagonba ütközik. A teherkocsik összekapcsolódnak. Milyen sebességgel mozognak tovább az ütközés után?

8A-8 Egy 0,4 kg tömegű labdát 10 m/s sebességgel elhajítottunk. Mekkora sebességgel kellene mozognia annak a 2 g tömegű csapágygolyónak, hogy az impulzusa megegyezzen a labdáéval?

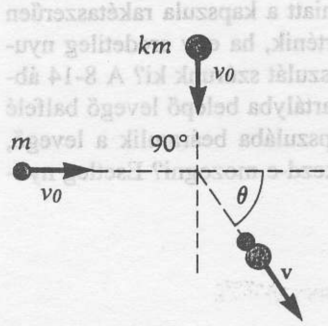
8B-9 Egy test 7,5 m/s sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen csúszik az x tengely pozitív irányába, majd 3 kg és 5 kg tömegű részekre robban szét. A robbanás után a két rész a síkon mozog tovább. Mekkora az 5 kg tömegű test sebességének nagysága és milyen irányú, ha a 3 kg-os darab 15 m/s sebességgel és az x tengely pozitív irányával 36,9°-os szöget bezárva mozog.

8B-10 Egy 1600 kg tömegű teherautó 10 m/s sebességgel közeledik egy kereszteződés felé. A merőleges keresztúton 25 m/s sebességgel egy 1000 kg tömegű személyautó érkezik. A gépkocsik összeütköznek és szorosan összeakadnak egymással. Határozzuk meg a roncs irányát közvetlenül az ütközés után, vagyis azt a szöget, amelyet a teherautó eredeti irányával zár be.

8B-11 Két m, ill. km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 nagyságú kezdősebességgel merőleges irányból a 8-15 ábrán látható módon közeledik egymáshoz és összeütközik, majd összeragadva mozog tovább. Fejezzük ki a

[4] A kérdést L. Epstein és P. Hewitt Thinking Physics c. könyvének első kötetéből vettük át (1979-es kiadás 37. old.). (Insightt Press 614 Vermont Street San Francisco, CA 94107)

végsebességük *irányát* meghatározó θ szöget k segítségével.



8-15. ábra
8B-11 feladathoz

8B-12 Egy 10 m/s sebességgel észak felé mozgó 1400 kg tömegű gépkocsi kelet felé hajtó 3000 kg-os, 12 m/s sebességű személygépkocsival ütközik és összetapad vele. a) Milyen sebességgel mozog az autóroncs közvetlenül az ütközés után? b) Határozzuk meg, hogy az ütközés előtti mozgási energiának hány százaléka alakul át termikus, deformációs, hang stb. energiává az ütközés során.

8B-13 Egy 1 m/s sebességgel észak felé korcsolyázó 75 kg-os férfi összeütközik egy 2 m/s sebességgel kelet felé sikló 30 kg tömegű kislánnyal és az ütközéskor összekapaszkodik vele. Határozzuk meg a férfi-kislány pár ütközés utáni sebességét és a mozgás irányát.

8B-14 Két, *m*, ill. *km* (*k* állandó) tömegű test egyenlő v_0 kezdősebességgel mozog a $+x$ ill. $-x$ irányban, összeütközik majd összeragadva mozog tovább. a) Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében, hogy mekkora az összeragadt testek *v* sebességének nagysága és iránya. b) Mekkora a v/v_0 arány, ha $k = 2$.

8B-15 Egy kezdetben test három részre robban szét. Egy 3 kg tömegű darab 4 m/s sebességgel a $+x$ irányba, egy másik 2,5 kg-os darab pedig 2,5 m/s sebességgel a $+y$ irányba repül. Határozzuk meg a harmadik rész impulzusának nagyságát és irányát.

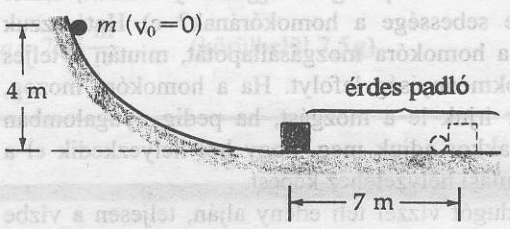
8B-16 Egy nyugalomban levő 9 kilogramm tömegű test három részre robban szét. Két, egyenként 2 kg-os darabja a $+x$, ill. $+y$ irányba repül rendre 1,5, ill. 2 m/s sebességgel. Határozzuk meg a harmadik darab sebességének nagyságát és irányát.

8B-17 A kezdetben nyugalomban lévő *m*, ill. *M* tömegű testet a közéjük szorított elhanyagolható tömegű rugó szétveti. Mutassuk meg, hogy ha a rugó által végzett munka *W*, akkor a *m* tömegű test sebessége

$$v = \left[\frac{2MW}{m(m+M)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

8B-18 A $+x$ irányban 3 m/s sebességgel mozgó 2 kg tömegű test a kezdetben nyugalomban lévő 4 kg tömegű testbe ütközik és összeragad vele. Az igy keletkezett 6 kg tömegű test összeütközik és hozzáragad az *y* tengely negatív irányában mozgó 1,5 kg tömegű testhez. Mekkora volt a 1,5 kg-os test sebessége az ütközés előtt, ha a testhármas az ütközés hatására nyugalomba kerül.

8B-19 Az $m = 2$ kg tömegű test a 8-16 ábrán látható módon lecsúszik egy súrlódásmentes rámpán és beleütközik az alján lévő 5 kg-os testbe. A két test összeragadva csúszik tovább a vízszintes érdes padlón és 7 m út megtétele után megáll. Mekkora a csúszó súrlódási együttható a padló és a testek között?



8-16. ábra
8B-19 feladathoz

8B-20 Egy 200 g tömegű gittcsomó vízszintesen elmozdulva 8 m/s sebességgel csapódik bele a vízszintes felületen nyugalomban lévő 3 kg-os fadarabba és hozzáragad. A fadarab és a felület között a csúszó súrlódási együttható 0,030. Mekkora utat tesz meg a gittes fadarab a felületen a megállásig?

8.3 Az erőimpulzus

8A-21 Egy 3 kg tömegű 7,5 m/s sebességgel mozgó test irányába sebességének megváltozása nélkül állandó erő hatására 0,05 s alatt ellenkezőre változik. Határozzuk meg az erő nagyságát és irányát.

8A-22 A 60 g tömegű teniszlabda 9 m/s sebességgel vízszintesen közeledik a játékos felé, aki rakettjével úgy üti meg, hogy a labda 20 m/s sebességgel pontosan ellentétes irányban kezd mozogni. Feltéve, hogy az ütő 0,01 s-ig érintkezett a labdával, határozzuk meg, hogy mekkora átlagos erő ébredt az ütő és a labda között. Készítsünk vektorábrát a labda impulzusának változásáról.

8A-23 a) Határozzuk meg egy 1000 kg tömegű, 12 m/s sebességű gépkocsi impulzusát. b) Mekkora átlagos erő hat a gépkocsira, ha egy téglafalba ütközik és 0,5 s alatt megáll?

8A-24 Az emberi test tűrőképességének vizsgálata során ütközéses baleseteket szimuláltak. Egy alkalommal a kísérleti személyt, Dr. John Stappot 1,4 s alatt lassították le 1011 km/h sebességről megállásig. Mekkora átlagos erőt fejtettek ki rá a gyors fékezés során a speciális fékező hevederek? Az erőt fejezzük ki a Dr. Stappra ható gravitációs erő többszöröseként. (A kísérletet dr. Stapp maradandó sérülés nélkül vészelte át.)

8B-25 Egy 0,75 kg tömegű labdát 1 m magasságból vízszintes padlóra ejtünk. A labda 85 cm magasra pattan vissza. Mekkora erőimpulzust gyakorol a padló a labdára?

8B-26 Meglepő eredményű demonstrációs kísérlet, hogy a második emeletről egy 5 cm vastagságú habszivacs párnára ejtett tojás nem törik össze. a) Amennyiben a habszivacs párna 6,25 ms alatt állítja meg a ráeső tojást, akkor határozzuk meg, hogy mekkora erőt fejt ki a párna a 11 m magasról leejtett 0,6 N súlyú tojásra a lassítás ideje alatt. b) Milyen minimális vastagságúra nyomja össze a tojás a párnát? (A kísérlet kipróbálásakor célszerű valakit megkérni, hogy a párnáról majdnem egy méternyire felpattanó tojást kapja el, mert ha ebből a magasságból a puszta Földre esik, akkor biztosan eltörik.)

8B-27 Egy 5 kg tömegű kezdetben nyugalomban lévő testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

8B-28 Az m tömegű pontszerű test v sebességgel mozog a x tengely pozitív irányban. Milyen nagyságú és irányú erőimpulzus hatására változik meg a sebessége úgy, hogy y tengely pozitív irányába mutasson.

8B-29 Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka $8\cdot10^3$ N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg a) mennyi idő alatt áll meg a golyó, b) milyen mélyen hatol be a fába, c) mennyi munkát végez a fakocka, míg a golyó megáll, d) mennyivel változik a golyó mozgási energiája.

8B-30 A 9 m hosszúságú fonalra kötött 12 N súlyú testet gyors vízszintes lökéssel hozzuk mozgásba, amelynek hatására a fonal a vízszintestől lefelé mért 30°-os szögig tér ki. Mekkora erőimpulzussal hoztuk mozgásba a testet?

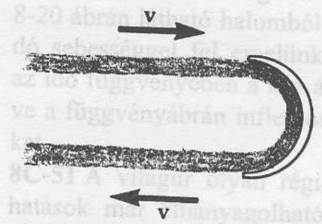
8B-31 A 0,100 kg tömegű 20 m/s sebességgel vízszintesen mozgó baseball labdát úgy ütötte vissza a játékos, hogy ennek hatására az a vízszintessel 30°-os szöget bezáró irányban háromszor nagyobb sebességgel kezdett repülni. A visszaütött labda pontosan az adogató játékos felett szállt el. a) Készítsünk vektorábrát a labda impulzusváltozásának meghatározására. b) Milyen nagyságú és irányú átlagos erő hatott a labdára, ha az ütő és a labda 0,002 s -ig érintkezett.

8.4 Folytonosan változó impulzus.

8A-32 Oldjuk meg újra a 8-8 példát 1,0 s-os időtartam helyett 0,01s időintervallummal.

8A-33 A 600 l/perc hozamú és 20 m/s sebességű vízszintes irányú vízsugár függőleges falba ütközik, s számottevő visszafreccsenés nélkül szétterül rajta. Mekkora erőt fejt ki a vízsugár a falra? (A víz sűrűsége 10^3 kg/m^3.)

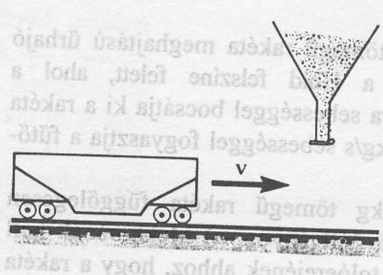
8A-34 Egy nyugvó turbinalapátba vízsugár ütközik. A lapát a vízsugár irányát a 8-17 ábrán látható módon megfordítja. A víz sebessége mind az ütközés előtt, mind az ütközés után v. Határozzuk meg a lapátra ható erőt, ha az időegységenként becsapódó víz tömege μ.



8-17. ábra
8A-34 feladathoz

8A-35 Merőleges falra 0,50 g tömegű söréteket lőnek ki, másodpercenként 15 sörét éri el a falat és ezek sebessége 250 m/s. a) Mekkora erő hat a falra, ha a sörétek beleragadnak? b) Mekkora ez az erő, ha a sörétek tökéletesen rugalmasan ütközve visszapattannak a falról?

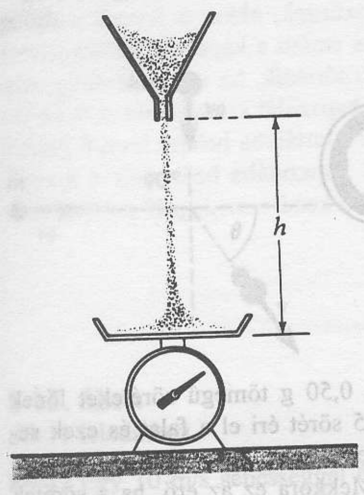
8B-36 Az 5000 kg-os üres pőrekocsi a 8-18 ábrán látható módon súrlódásmentesen gurul át a rögzített helyzetű homokszóró garat alatt. A kocsi 2 m/s sebességgel közeledik a garathoz. Amikor a kocsi a garat alá ér, a annak csapóajtaja kinyílik és állandó intenzitású homokáram hull belőle a kocsira mialatt az teljes hosszában elhalad a garat alatt. Határozzuk meg a megrakott kocsi sebességét, ha összesen 10 000 kg homok hullik rá.



8-18. ábra
8B-36 feladathoz

8B-37 Tételezzük fel, hogy az előző feladatban a kocsit állandó 2 m/s sebességgel mozgatjuk el a garat alatt, és a teljes 10 000 kg tömegű homokmennyiség egyenletesen oszlik el a 10 m hosszú kocsin. Mekkora erő szükséges a kocsi állandó sebességű mozgatásához?

8B-38 A 8-19 ábrán látható elrendezésben egy mérleg tányérjára 2 másodpercen át ólomsörétek hullanak egyenletesen, másodpercenként 1 kg tömegben. A sörétek 5 m/s sebességgel érkeznek a mérlegtányérra és nem pattannak el róla. Ábrázoljuk az idő függvényében, hogy mekkora erőt jelez a mérleg. A görbét a $t=-1$ s időpillanattól kezdve (egy másodperccel az első sörét lehullása előtt) a $t=3$ s-ig (egy másodperccel az utolsó sörét lehullása utáni) készítsük el. Tüntessük fel a folyamat jellegzetes pontjainál a megfelelő számértékeket is.



8-19. ábra
8B-38 feladathoz

8.5 A rakétamozgás

8A-39 A 10 kg tömegű rakétalövedéket vízszintes irányban indították el. Mekkora vízszintes irányú sebességgel mozog a rakéta 3 kg tömegű fűtőanyag elfogyasztása után, ha a hajtóanyag a rakétához képest 1500 m/s sebességgel lép ki a fúvókákon. A légellenállástól tekintsünk el.

8A-40 Egy 3000 kg tömegű rakéta meghajtású űrhajó egy helyben lebeg a Hold felszíne felett, ahol a $g=1{,}63$ m/s^2. Mekkora sebességgel bocsátja ki a rakéta a hajtóanyagot, ha 2 kg/s sebességgel fogyasztja a fűtőanyagot?

8B-41 Egy 130 000 kg tömegű rakéta függőlegesen helyezkedik el a kilövőállványon. a) Mekkorának kell lennie a hajtóművek tolóerejének ahhoz, hogy a rakéta 17 m/s^2 kezdeti gyorsulással induljon felfelé? b) Hány kg/s a fűtőanyag fogyasztás ekkor, ha a hajtógázok sebessége 2100 m/s?

További feladatok

8C-42 Egy 8 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At - Bt^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 24$ N/s és $B = 1{,}2$ N/s^2. a) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el a tömeg mielőtt újra megállna. b) Mennyi idő múlva következik ez be?

8C-43 Egy 2,5 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 0{,}75$ N/s^2. a) Határozzuk meg a test sebességét 15 másodperccel az erő alkalmazása után. b) Mekkora állandó erővel lehetne ugyanennyi idő alatt elérni ezt a sebességet?

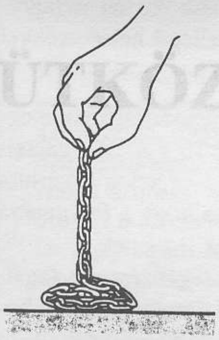
8C-44 Egy 15 kg tömegű test északi irányban 10 m/s sebességgel súrlódásmentesen csúszik egy vízszintes síkon és összeütközik egy 5 kg tömegű északkelet irányból csúszó, 25 m/s sebességű testtel. Ütközés után a két test összeragad. Mekkora sebességgel kell az összeragadt testekről lelökni egy 3 kg tömegű darabot ahhoz, hogy a megmaradó rész 10 m/s végső sebességgel mozogjon egyenletesen észak felé.

8C-45 Egy M tömegű eredetileg nyugalomban lévő test két különböző tömegű részre robban szét. Hányad része jut a kisebbik m tömegű darabra a robbanás során felszabaduló energiának? Ábrázoljuk ezt az energiahányadot m függvényében.

8C-46 A légierő önkéntesek alkalmazásával vizsgálja, hogy az emberi test hogyan tűri a nagy gyorsulásokat. Az önként vállalkozó személyek vízszintes sínpályán mozgó, rakéta hajtású szánokon ülnek. A szánok „vízfékek" segítségével rendkívül gyorsan megállíthatók. A hirtelen megállást úgy hozzák létre, hogy egy szerkezet a sínpálya alatt elhelyezkedő vízzel teli csatornából hirtelen vizet mer a szánkóba. Attól függően, hogy a kísérleti személy szemben vagy háttal ül a lassítási irányhoz képest ezt a folyamatot képiesen „szemgolyó benyomó", ill. „szemgolyó guvasztó" folyamatnak nevezzük. Ifjabb Eli Beeding kapitány néhány század másodpercig 83 g gyorsulást is elviselt anélkül, hogy rosszul lett volna. Tekintsünk egy olyan kísérletet, amikor a szán kezdeti sebessége 28 km/h és 0,005 s-ig 83g lassulás lép fel. a) Határozzuk meg, hogy mekkora átlagos erő hatna ezalatt az idő alatt Beeding kapitányra, akinek súlya 800 N, b) Mekkora sebességgel mozog a szán a fékezési folyamat után? c) Mennyi víz került a szánba a fékezés során, ha a szánkó és a kísérleti személy együttes tömege a fékezés előtt 1000 kg volt?

8C-47 Egy l hosszúságú hajlékony láncot felső végénél fogva függőlegesen tartunk egy asztallap felett úgy, hogy a lánc alsó vége éppen érinti az asztallapot. A lánc egységnyi hosszának tömege μ. Ha a lánc végét elengedjük, akkor az asztalra hulló lánc az eredetileg zérusról indulva egyre nagyobb és nagyobb erőt fejt ki az asztallapra. Az erő abban a pillanatban válik maximálissá, amikor a lánc felső vége éppen az asztalra esik. Bizonyítsuk be, hogy a maximális erő amit a lánc az asztalra gyakorol, éppen háromszorosa a lánc súlyának. (Útmutatás: Gondoljuk meg, hogy a lánc már asztalon fekvő részének súlya mellett mekkora többlet erő szükséges a lánc utolsó Δx hosszúságú részének. Vegyük észre, hogy az utolsó Δx hosszúságú darabka megállása lényegében $\Delta t = \Delta x/v$ időtartam alatt következik be, ahol v az h magasságból szabadon eső test sebessége.)

8C-48 Függőlegesen lógó, m tömegű, hajlékony, l hosszúságú láncot állandó v sebességgel engedünk le az asztalra. Ábrázoljuk az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra. A $t = 0$ időpont görbe legyen az, amikor a lánc megérinti az asztallapot. A inflexiós pontjai mellé írjuk be a megfelelő erő értékeket m, l és v függvényében. (Útmutatás: Az asztalon fekvő lánc súlya mellett milyen további erő szükséges az asztalt érő láncdarabok megállításához?)



8-20. ábra
8C-48 feladathoz

8C-49 Egy mérlegtányérra h magasságból ólomsörétek hullanak és másodpercenként n számú részecske éri el a tányért. Egy-egy sörét tömege m. A mérleg zérust mutat a sörétek lehullása előtt. Mit mutat a mérleg t idővel az első sörét becsapódása után?

8C-50 Egy l hosszúságú m tömegű hajlékony láncot a 8-20 ábrán látható halomból egyik végénél fogva állandó sebességgel fel emelünk függőlegesen. Ábrázoljuk az idő függvényében a kéz által kifejtett erőt, megjelölve a függvényábrán inflexiós pontokhoz tartozó értékeket.

8C-51 A világűr olyan régiójában, ahol a gravitációs hatások már elhanyagolhatóak, az m tömegű űrhajó, üzemanyagával együtt, egy interciarendszerhez viszonyítva nyugalomban van. A rakétamotorokat beindítják, s a hajtóanyag az űrhajóhoz képest v_r állandó sebességgel áramlik ki a fúvókákon. Mekkora a rakéta és a még megmaradó üzemanyag tömege abban időpontban amikor a hajtóanyag-gázokat úgy bocsátja ki a rakéta, hogy sebessége az említett inerciarendszerhez képest éppen zérus.

7A-5 8,26 m/s
7A-7 $2mg$
7A-9 a) 5,42 m/s b) $3mg$
7A-11 $\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$
7B-13 5,79 m/s
7B-15 a) 3,61 m/s b) 1,74 N
7B-17 b) $g\sqrt{3/2}$, g c) $3mg/2$, sugárirányban befelé
7B-19 4,20 mg
7B-21 mg
7B-23 a) 37,6° b) 36,3 N
7B-25 1,45 m
7B-27 $8d$
7B-29 a) $-3ax^2+b$ b) $\sqrt{b/a}$
c) $\frac{2}{3}\sqrt{b^3/3a}$
7A-31 17,0 m
7B-33 a) 7,67 m/s b) 0,932
7B-35 $1{,}12\times10^5$ J
7C-37 A válasz adott.
7C-39 –1,00 J
7C-41 a) x_o b) $2bx_o$;$+x$ irányban
7C-43 A válasz adott.
7C-45 A válasz adott.
7C-47 A válasz adott.
7C-49 0,344 m
7C-51 a) $0{,}222g$ b) $1{,}52\times10^4$ N
7C-53 a) $0\le x\le 2$ m b) 8 J

VIII. Fejezet

8A-1 1,23 m/s
8A-3 34,3 J
8A-5 10 m/s a szerelvény felé
8A-7 0,400 m/s
8B-9 7,22 m/s; -48,4°
8B-11 $\theta=\operatorname{arctg} k$
8B-13 0,91 m/s 51,3° északkeletre
8B-15 13,0 kg·m/s; 202,6° a +x iránytól az óramutató járásával egyező irányba
8B-17 A válasz adott.
8B-19 0,0466
8A-21 900 N, az eredeti sebességgel ellentétesen
8A-23 a) $1{,}20\times10^4$ kg·m/s b) $2{,}40\times10^4$ N
8B-25 6,38 N·s felfelé
8B-27 7,80 m/s
8B-29 a) $4{,}37\times10^{-4}$ s b) 0,153 m
c) $1{,}22\times10^{-3}$ J d) $1{,}23\times10^3$ J
8B-31 a) 7,80 kg·m/s; 22,6° a horizont fölött
b) 3900 N; 22,6° a horizont fölött
8A-33 200 N
8A-35 a) 1,88 N b) 3,75 N
8B-37 $4{,}00\times10^3$ N
8A-39 535 m/s
8B-41 a) $3{,}48\times10^6$ N b) 1659 kg/s
8C-43 a) 338 m/s b) 56,3 N
8C-45 a) $(M-m)/M$
8C-47 A válasz adott.
8C-49 $nmg\left(t+\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$
8C-51 $0{,}368M$

IX. Fejezet

9A-1 a) -0,167 m/s b) 0,333 m/s
9A-3 a) 42,9 m/s, 37° délnyugatra b) 7720 J
9A-5 Nem; 2,80 J elveszett
9B-7 a) $\sqrt{1{,}41}$ m/s b) 57,4 m/s c) 97,6%
9B-9 A válasz adott.
9B-11 1,81 m/s, 2,27 m/s
9A-13 0,200 m
9A-15 $(-\frac{7}{13}m, \frac{1}{13}m)$
9B-17 5,35 m
9A-19 a) 30 m/s, vízszintesen b) 21,2 m/s, 45° a vízszintes alatt
9B-21 A válasz adott.
9B-23 A válasz adott.
9B-25 7,28 m/s
9B-27 a) 3,00 m/s b) 3,00 m/s
c) 608 J és 824 J d) 0 és 216 J
9B-29 216 J
9C-31 a) $\left(\frac{M-m}{M+m}\right)$ b) ugyanaz mint a)
9C-33 $4M\sqrt{gl}/m$
9C-35 a) 65,2 m/s b) 0,458
9C-37 $\sqrt{1-d/h}$
9C-39 (1,03 m, 0,88 m)
9C-41 A válasz adott.
9C-43 $v_A=-0{,}667$ m/s; $v_B=0{,}800$ m/s
9C-45 2,21 m/s
9C-47 a) $\frac{3}{8}v$ b) $\frac{25}{32}\mu v$
9C-49 a) $\frac{10}{30}v$ b) $\frac{11}{30}v$ (Ez a 8. fejezet 6. kérdésére adható mennyiségi válasz)

X. Fejezet

10A-1 a) 1,50 m b) 24,0 N·m
10A-3 a) $2bF$ b) $2bF$
10A-5 A válasz adott.
10A-7 $l/2$
10B-9 $R/12$
10B-11 $\frac{5}{16}mgl$
10A-13 2,06 m