1. ZÁRTHELYI

1996 tavasz I.évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Válaszát indokolja!

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2}) \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$$

MO. a) Igen: $\sim -\frac{1}{n^2}$ b) Nem: $\sim \frac{1}{n}$.

2. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ? Van-e olyan átrendezésük, melyek végtelenbe divergálnak ? Válaszát indokolja !

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

MO. a) Nincs: abszolút konvergens, b) Van: feltételesen konvergens.

3. Bizonyítsa be, hogy az $f_n(x) = e^{-nx}$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a $(0,\infty)$ intervallumon!
MO. $f(x) = 0$ tetsz. $x \in (0,\infty)$, $r(x) = f(x) - f_n(x)$–el, $\lim r_n(\frac{1}{n}) = e^{-1} \neq 0$.

4.

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{n}{1+nx^3}\, dx \ = \ ?$$

MO. $f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx^3} \longrightarrow \dfrac{1}{x^3}$, így $|r(x)| = \left|\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{n}{1+nx^3}\right| = \left|\dfrac{1}{x^3(1+nx^3)}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ ha $x \geq 1$, tehát $(f_n(x))$ egyenletesen konvergens $[1,2]$–n, így $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_1^2 \frac{n}{1+nx^3}\, dx =$

$$= \int_1^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+nx^3}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_1^2 = \frac{3}{8}\,.$$

5.. Hányszor deriválható az $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvény az origóban? Válaszát indokolja! Ha létezik, számítsa ki a negyedik deriváltját az origóban! !

MO. $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - + \ldots$ konvergens hatványsor határfüggvénye, tehát akárhányszor deriválható mindenütt és a sor a függvény Taylor-sora. Így $f^{(4)}(0) = \dfrac{4!}{5!} = \dfrac{1}{5}$.

6. Hol folytonosak az alábbi függvények ? Válaszát indokolja !

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases} \qquad b)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

MO. Mindkettô az origó kivételével mindenütt, mert a koordinátafüggvények folytonosak és ezekbôl alapmûveletekkel vannak összerakva, melyek megôrzik a folytonosságot. Továbbá a) nem folytonos az origóban, mert $f(0,x) = 0 \longrightarrow 0 \neq \frac{1}{2} \longleftarrow f(x,x)$ ha $x \longrightarrow 0$
b) folytonos az origóban is , mert $|f(x,y)| \leq y^2 \longrightarrow 0$ ha $x \longrightarrow 0$.

7. Határozzuk meg az alábbi függvény parciális deriváltjait az origóban !

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

MO. $f(x,0) = 0$ tetsz. $x \neq 0$–ra, így $f_x(0,0) = 0$. $f(0,y) = y$ tetsz. $y \neq 0$–ra, így $f_y(0,0) = 1$.