1. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -12 & -7 & 1 \\ 24 & 15 & -3 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ egyenletet és számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát és sorrangját!

Megoldás

Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & 4 \\ -12 & -7 & 1 & -4 \\ 24 & 15 & -3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

(Ehó mátrix felírása 2p, elimináció 8 pont, elszámolásonként -1p) Innen az egyenlet megoldása visszahelyettesítéssel: $2z = 2$-ből $z = 1$, aztán $-y + 3z = 4$, azaz $-y = 4 - 3 \cdot 1 = 1$-ből $y = -1$ végül $6x + 3y + z = 4$-ből $6x = 4 - 3(-1) - 1 = 6$, azaz $x = 1$. (Visszahelyettesítés 6 pont, elszámolásonként -1p)

A mátrix determinánsa a Gauss-elimináció lépései alatt nem változott és háromszögmátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, így $\det(\mathbf{A}) = 6 \cdot (-1) \cdot 2 = -12$. (2 pont)

Végül a sorrang 3, mert a Gauss-elimináció végén kapott 3×3-as mátrixnak nincs 0 a főátlójában, így 3 érdemi egyenlet van. (2 pont)

2. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2^{2n+1} + 10(-3)^n}{7^n + 6n^3 + 1}$$

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2^{2n+1} + 10(-3)^n}{7^n + 6n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2 \cdot 4^n + 10(-3)^n}{7^n + 6n^3 + 1},$$

(Kitevő átalakítása: 4 pont) innen a számláló nagyságrendje 4^n, a nevezőé 7^n, (nagyságrend helyes felismerése: 4 pont) ezeket kiemelve (helyes kiemelés: 4 pont):

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{7^n} \frac{n^4 \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 + 10\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 + 6n^3 \left(\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{1}{7}\right)^n} = 0 \cdot \frac{0 + 2 + 0}{1 + 0 + 0} = 0,$$

ahol kihasználtunk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a^n n^p = 0$ ha $|a| < 1$.(helyes határértékek használata+műveletek elvégzése: 4+4 pont)

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$-(1-i)^4 z^2 + 4z + 2 = 0$$

Megoldás: $(1-i)^4$-t kell kiszámítanunk először. Ezt lehet például trigonometrikus alakkal ($(1-i)^4$ trigonometrikus alakja: 4 pont), ekkor

$$(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right)^4 = 4(\cos(7\pi) + i\sin(7\pi)) = -4 + 0i$$

(hatványozás elvégzése: 4 pont) Innen a megoldandó egyenlet:

$$4z^2 + 4z + 2 = 0$$

Ennek a gyökeit megkaphatjuk a másodfokú megoldóképlet segítségével: (megoldóképlet felírása: 4 pont)

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{2}$$

(behelyettesítés a megoldóképletbe: 4 pont) Mivel az -1-nek két négyzetgyöke van a komplex számok halmazán, a $\pm i$, így két megoldás van a $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ és a $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (megoldások felírása: 4 pont).

4. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 3x + 2}$$

Megoldás:

Mivel behelyettesítés után a $\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 3x + 2}$ tört a 2-ben $\frac{0}{0}$ alakú (a $\frac{0}{0}$ alak felismerése: 4 pont), így szorzatra bontunk (a szorzatra bontás: 4 pont, egyszerűsítés: 4 pont):

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)^2}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x-1},$$

Ez utóbbi alak már folytonos a 2-ben, mert folytonos függvények hányadosa (annak felismerése, hogy lehet helyettesíteni: 4 pont), így behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy a határérték 0 (végeredmény: 4 pont).

5. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági pontjait, szakadási pontjait és azok típusát!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+1}{2x-3} & \text{ha } x \leq 0 \\ \dfrac{\cos(\sqrt{x})-1}{\sin(x)} & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

Megoldás: Folytonos függvények kompozíciója is folytonos, így a függvénynek csak az illesztési pontban és a nevezők gyökeiben lehet szakadása, a többi pontban folytonos (eddig 2 pont). $2x-3$-ból $x = \frac{2}{3}$, de ezt a pontot nem kell vizsgálni, mert csak negatív x-re él ez a definíció. $\sin(x) = 0$-nak egyetlen megoldása van, az $[0,1]$ intervallumon, az $x = 0$. Így a vizsgálandó pontok az $x = 0$ és az $x = 1$(vizsgálandó pontok helyes meghatározása: 2 pont) .

Ha $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{\sin(x)} \frac{\cos(\sqrt{x})+1}{\cos(\sqrt{x})+1} =$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos^2(\sqrt{x})-1}{\sin(x)(\cos(\sqrt{x})+1)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2(\sqrt{x})}{\sin(x)(\cos(\sqrt{x})+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} (\sqrt{x})^2 \frac{1}{x} \frac{x}{\sin(x)} \frac{1}{(\cos(\sqrt{x})+1)} = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

(jobboldali limesz: 6 pont) másrészt:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{4x+1}{2x-3} = -\frac{1}{3},$$

(baloldali limesz: 2 pont) mert a tört folytonos 0-ban. Mivel létezik a baloldali és jobboldali határérték is, és mindkettő véges de nem egyenlőek, így $x = 0$-ben véges ugrása van a függvénynek. (véges ugrás: 2 pont) Ha $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 0$$

(jobboldali limesz: 2 pont)

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{\sin(x)} = \frac{\cos(1)-1}{\sin(1)}$$

(baloldali limesz: 2 pont) Itt és létezik mindenkét oldali határérték és végesek. De nem egyenlő a kettő, mert $\cos(x)$-nek nem gyöke az 1, így $x = 1$-ben is véges ugrás van. (véges ugrás: 2 pont)