1. Jelek és rendszerek első házi feladat

1.1. Gerjesztés-válasz stabilitás és válaszjel

1.1.1. Gerjesztés-válasz stabilitás

Folytonos idejű rendszer Egy kauzális, lináris, folytonos idejű rendszer gerjesztés válasz stabil akkor és csak akkor, ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dx. < \infty$$

Így:

$$h(t) = 8\varepsilon(t)e^{-0,5t}\cos(3t + 0,5)$$
$$\int_{0}^{\infty} |8e^{-0,5t}\cos(3t + 0,5)|\, dx. < \infty$$

Tudjuk, hogy a koszinuszos tag nem rontja el a stabilitást, mivel:

$$0 < |\cos(3t + 0,5)| < 1$$

Tehát gerjesztés-válasz stabil a rendszer, ha a majoráns rendszer stabil:

$$\int_{0}^{\infty} |8e^{-0,5t}|\, dx. < \infty$$

$$\int_{0}^{\infty} |8e^{-0,5t}|\, dx. = -16[e^{-0,5t}]_{0}^{\infty} = 16 < \infty$$

Diszkrét idejű rendszer

Egy kauzális, lináris, diszkrét idejű rendszer gerjesztés válasz stabil akkor és csak akkor, ha:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Így:

$$h[k] = 6\delta[k] + \varepsilon[k-1]\{3(0.4)^k + (-2)(-0,4)^k\}$$

$$6 + \sum_{1}^{\infty} |3(0,4)^k + (-2)(-0,4)^k| < \infty$$

$$6 + \sum_{1}^{\infty} 3(0,4)^k + \sum_{1}^{\infty} 2(0,4)^k < \infty$$

$$6 + 3\sum_{1}^{\infty}(0,4)^k + 2\sum_{1}^{\infty}(0,4)^k < \infty$$

$$6 + 3\left(\frac{1}{1-0,4} - 1\right) + 2\left(\frac{1}{1-0,4} - 1\right) < \infty$$

$$1 + 5\left(\frac{5}{3}\right) < \infty$$

$$1 + \frac{25}{3} < \infty$$

Amint látjuk a feltevés teljesül, a rendszer gerjesztés-válasz stabil.

1.1.2. Gerjesztés-válasz stabilitásának ”elrontása”

A F.I. rendszer esetén pl. a $h(t) = 8\varepsilon(t)e^{10t}\cos(3t+0.5)$ impulzusválaszra $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt$ végtelent ad, míg D.I rendszer esetén $h[k] = 6\delta[k] + \varepsilon[k-1]\{3(4)^k + (-2)(4)^k\}$ impulzusválaszra $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|$ végtelen.

1.1.3. Válaszjel

A bemeneti jel:

$$u[k] = 10\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-5]\}$$

$$y[k] = u[k] * h[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[k]$$

Válaszjel k = 0-ra:

$y[0] = u[0]h[0]$

$y[0] = 10\{\varepsilon[0] - \varepsilon[-5]\}(6\delta[0] + \varepsilon[-1]\{3(0.4)^0 + (-2)(-0.4)^0\})$

$y[0] = 10\{\varepsilon[0] - \varepsilon[-5]\}(6\delta[0]) + 10\{\varepsilon[0] - \varepsilon[-5]\}(\varepsilon[-1]\{3(0.4)^0 + (-2)(-0.4)^0\})$

$y[0] = 60\{\varepsilon[0] - \varepsilon[-5]\}$

$y[0] = 60$

Válaszjel k = 1-re:

$$\begin{aligned}
y[1] &= u[0]h[1] + u[1]h[0] \\
y[1] &= 10\{\varepsilon[0] - \varepsilon[-5]\}(6\delta[1] + \varepsilon[0]\{3(0,4)^1 + (-2)(-0,4)^1\})+ \\
&+ 10\{\varepsilon[1] - \varepsilon[-4]\}(6\delta[0] + \varepsilon[-1]\{3(0,4)^0 + (-2)(-0,4)^0\}) \\
y[1] &= 20 + 60 = 80
\end{aligned}$$

Válaszjel k = 2-re:

$$\begin{aligned}
y[2] &= u[0]h[2] + u[1]h[1] + u[2]h[0] \\
y[2] &= 10\{\varepsilon[0] - \varepsilon[-5]\}(6\delta[2] + \varepsilon[1]\{3(0,4)^2 + (-2)(-0,4)^2\})+ \\
&+ 10\{\varepsilon[1] - \varepsilon[-4]\}(6\delta[1] + \varepsilon[0]\{3(0,4)^1 + (-2)(-0,4)^1\})+ \\
&+ 10\{\varepsilon[2] - \varepsilon[-3]\}(6\delta[0] + \varepsilon[-1]\{3(0,4)^0 + (-2)(-0,4)^0\}) \\
y[2] &= 10(3(0,4)^2 + (-2)(-0,4)^2)+ \\
&+ 10(3(0.4) + (-2)(-0.4))+ \\
&+ 10(6\delta[0]) \\
y[2] &= 10(3(0,16) + (-2)(0,16)) + 20 + 60 \\
y[2] &= 1,6 + 20 + 60
\end{aligned}$$

1.1.4. Válaszjel formulája

Folytonos idejű rendszer

$$\begin{aligned}
u(t) &= 1{,}2 \\
h(t) &= 8\varepsilon(t)e^{-0,5t}\cos(3t + 0,5) \\
y(t) &= ? \\
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 8\varepsilon(\tau)e^{-0,5\tau}\cos(3\tau + 0,5)1,2d\tau \\
y(t) &= 9,6\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau)e^{-0,5\tau}\cos(3\tau + 0,5)d\tau \\
y(t) &= 9,6\int_{0}^{\infty} e^{-0,5\tau}\cos(3\tau + 0,5)d\tau
\end{aligned}$$

Kétszeres parciális integrálással (rendezve, kifejezve):

$$37\int_0^\infty e^{-0,5\tau}\cos(3\tau + 0,5)d\tau = -2e^{-0,5\tau}\cos(3\tau + 0,5) + 12e^{-0,5\tau}\sin(3\tau + 0,5)\Big|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty e^{-0,5\tau}\cos(3\tau + 0,5)d\tau = -\frac{2}{37}e^{-0,5\tau}\cos(3\tau + 0,5) + \frac{12}{37}e^{-0,5\tau}\sin(3\tau + 0,5)\Big|_0^\infty$$

$$y(t) = 9,6\left(-\frac{2}{37}e^{-0,5\tau}\cos(3\tau+0,5) + \frac{12}{37}e^{-0,5\tau}\sin(3\tau+0,5)\Big|_0^\infty\right)$$
$$y(t) = -\frac{96}{185}e^{-\infty}\cos(\infty) + \frac{576}{185}e^{-\infty}\sin(\infty) - \left[-\frac{96}{185}e^{0}\cos(0,5) + \frac{576}{185}e^{0}\sin(0,5)\right]$$
$$y(t) = \frac{96}{185}e^{0}\cos(0,5) - \frac{576}{185}e^{0}\sin(0,5)$$
$$y(t) = \frac{96}{185}\cos(0,5) - \frac{576}{185}\sin(0,5) \approx -1.03730...$$

Diszkrét idejű rendszer

$$u[k] = 11(-5)^k$$
$$h[k] = 6\delta[k] + \varepsilon[k-1]\{3(0,4)^k + (-2)(-0,4)^k\}$$
$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[k-i]h[i] =?$$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 11(-5)^{k-i}(6\delta[i] + \varepsilon[i-1]\{3(0,4)^i + (-2)(-0,4)^i\})$$
$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 11(-5)^{k-i}(6\delta[i] + \varepsilon[i-1]\{3(0,4)^i + (-2)(-0,4)^i\})$$
$$y[k] = 6\delta[0]11(-5)^k + \sum_{i=1}^{\infty} 11(-5)^{k-i}(3(0,4)^i + (-2)(-0,4)^i)$$
$$y[k] = 66(-5)^k + 11(-5)^k\sum_{i=1}^{\infty}(-5)^{-i}(3(0,4)^i + (-2)(-0,4)^i)$$
$$y[k] = 66(-5)^k + 11(-5)^k\left[3\sum_{i=1}^{\infty}(-5)^{-i}(0,4)^i - 2\sum_{i=1}^{\infty}(-5)^{-i}(-0,4)^i\right]$$
$$y[k] = 66(-5)^k + 11(-5)^k\left[3\sum_{i=1}^{\infty}(-5)^{-i}(0,4)^i - 2\sum_{i=1}^{\infty}(-5)^{-i}(-0,4)^i\right]$$
$$y[k] = 66(-5)^k + 11(-5)^k\left[3\left(\frac{1}{1+\frac{0,4}{5}} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{1-\frac{0,4}{5}} - 1\right)\right]$$
$$y[k] = 66(-5)^k + 11(-5)^k\left[3\left(-\frac{2}{27}\right) - 2\left(\frac{2}{23}\right)\right]$$
$$y[k] = 66(-5)^k - \frac{902}{207}(-5)^k$$
$$y[k] = \frac{12754}{207}(-5)^k$$

1.2. Impulzusválasz, válaszjel

1.2.1. Impulzusválasz

Folytonos idejű rendszer

$$h(t) = D \cdot \delta(t) + \varepsilon(t) \cdot C^T \cdot e^{At} \cdot B$$
$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \cdot L_i$$
$$L_i = \prod_{p=1,p=i}^{n} \frac{A - \lambda_p E}{\lambda_i - \lambda_p}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2,2 & 27,4 \\ -0,25 & -0,3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} 1,3 & -1,1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 2,2 & 27,4 \\ -0,25 & -0,3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0.8\lambda + 0.25 (= 0)$$

$$\lambda_1 = -0.4 + 0.3i$$
$$\lambda_2 = -0.4 - 0.3i$$
$$L_1 = \begin{pmatrix} 0,5 - 4,3333i & 0 - 45,6667i \\ 0 + 0,4167i & -0,5 + 4,3333i \end{pmatrix}$$
$$L_2 = \begin{pmatrix} 0,5 + 4,3333i & 0 + 45,6667i \\ 0 - 0,4167i & -0,5 - 4,3333i \end{pmatrix}$$
$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} \cdot L_1 + e^{\lambda_2 t} * L_2$$
$$h(t) = -4 \cdot \delta(t) + \varepsilon(t) \cdot C^T \cdot e^{At} \cdot B$$
$$\begin{aligned} h(t) = & -4 \cdot \delta(t) + \\ & + \varepsilon(t) \cdot \begin{pmatrix} 1,3 & -1,1 \end{pmatrix} \cdot \left[e^{(-0.4+0.3i)t} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 - 4,3333i & 0 - 45,6667i \\ 0 + 0,4167i & -0,5 + 4,3333i \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + e^{(-0.4-0.3i)t} \begin{pmatrix} 0,5 + 4,3333i & 0 + 45,6667i \\ 0 - 0,4167i & -0,5 - 4,3333i \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} h(t) = & -4 \cdot \delta(t) + \varepsilon(t) \cdot \Big(e^{(-0.4+0.3i)t} (-0.1 - 109.923333333333i) \\ & + e^{(-0.4-0.3i)t} (-0.1 + 109.923333333333i) \Big) \end{aligned}$$

Diszkrét idejű rendszer

$$A = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,7 \\ -0,5 & -0,1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,8 \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,5 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -1,25 \end{pmatrix}$$

$$h[k] = D \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot C^T \cdot A^{k-1} \cdot B$$

$$A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \cdot L_i$$

$$L_i = \prod_{p=1, p=i}^{n} \frac{A - \lambda_p E}{\lambda_i - \lambda_p}$$

$$det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 1,1 & 0,7 \\ -0,5 & -0,1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 0.24 (= 0)$$

$$\lambda_1 = 0,4$$

$$\lambda_2 = 0,6$$

$$\lambda_1^{k-1} = 0,4^{k-1}$$

$$\lambda_2^{k-1} = 0,6^{k-1}$$

$$L_1 = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{pmatrix} -2,5 & -3,5 \\ 2,5 & 3,5 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} = E - L_1 = \begin{pmatrix} 3,5 & 3,5 \\ -2,5 & -2,5 \end{pmatrix}$$

$$C^T A^{k-1} B = C^T(\lambda_1^{k-1} L_1 + \lambda_2^{k-1} L_2) B = -2,46\lambda_1^{k-1} + 1,85\lambda_2^{k-1}$$

$$h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1] C^T A^{k-1} B$$

$$h[k] = -1,25\delta[k] + \varepsilon[k-1]\{-2,46 \cdot 0,4^{k-1} + 1,85 \cdot 0,6^{k-1}\}$$

$$h[k] = -1,25\delta[k] + \varepsilon[k-1]\{-6,15 \cdot 0,4^k + -3.08333333 \cdot 0,6^k\}$$

1.2.2. Diszkrét idejű rendszer impulzusválasza adott értékre

k	$u[k]$	$y[k] = h[k]$	$x_1[k]$	$x_2[k]$
-1	0	0	0	0
0	1	-1.25	0	0
1	0	-0.61	-0.3	0.8
2	0	0.126	0.23	0.07
3	0	0.2724	0.302	-0.122

A kiszámolás menete (MATLAB script):

```
clear all;
A = [1.1 0.7; -0.5 -0.1]
B = [-0.3; 0.8]
C = [0.7 -0.5]
D = -1.25

x = [0;0]
kmax = 4; % k = 15-ig szamolunk, de a MATLAB 1-tol indexel...
h = zeros(1, kmax); % elore foglalunk az impulzusvalasz vektoranak
k = 1;
% egysegugras, a MATLAB 1-tol indexel!!!
```

```
u = zeros(1, kmax);
u(1) = 1;
while k <= kmax,
  h(k) = C * x + D * u(k);
  x = A * x + B * u(k)
  k = k + 1;
end
h
```

Kiszámolt impulzusválaszból Az 1.2.1 pontban kiszámolt impulzusválasz formulával az eredmény megegyezik:

$$
\begin{aligned}
h[0] &= -1,25\delta[0] + \varepsilon[-1]\{-2,46 \cdot 0,4^{-1} + 1,85 \cdot 0,6^{-1}\} = -1,25 \\
h[1] &= -1,25\delta[1] + \varepsilon[0]\{-2,46 \cdot 0,4^{0} + 1,85 \cdot 0,6^{0}\} = -0,61 \\
h[2] &= -1,25\delta[2] + \varepsilon[1]\{-2,46 \cdot 0,4^{1} + 1,85 \cdot 0,6^{1}\} = 0.126 \\
h[3] &= -1,25\delta[3] + \varepsilon[2]\{-2,46 \cdot 0,4^{2} + 1,85 \cdot 0,6^{2}\} = 0.2724
\end{aligned}
$$

1.2.3. Válaszjel gerjesztésre

Folytonos idejű rendszer

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \varepsilon(t)\{-2 + 6 \cdot e^{-0,2t}\} \\
y(t) &= h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
&\dots
\end{aligned}
$$

A megoldáshoz ki kell „csak” számolni az integrál értékét, amivel könnyen az eredményhez juthatunk.
Lásd a csatolt ábrát.

Diszkrét idejű rendszer

$$u[k]=10(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-5])$$

$$y[k]=h[k]*u[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h[i]u[k-i]$$

$$y[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Bigg(-1,25\delta[i]+\varepsilon[i-1]\{-2,46\cdot 0,4^{i-1}+1,85\cdot 0,6^{i-1}\}\Bigg)\cdot 10(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-5])$$

$$y[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Bigg(-1,25\delta[i]\cdot 10(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-5])\Bigg)+$$

$$+\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Bigg(\varepsilon[i-1]\{-2,46\cdot 0,4^{i-1}+1,85\cdot 0,6^{i-1}\}\cdot 10(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-5])\Bigg)$$

$$y[k]=\varepsilon[k](-12,5)+10\sum_{i=1}^{\infty}\Bigg((-2,46\cdot 0,4^{i-1}+1,85\cdot 0,6^{i-1})\cdot(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-5])\Bigg)$$

$$y[k]=\varepsilon[k](-12,5)+10\sum_{i=1}^{\infty}\Bigg((-2,46\cdot 0,4^{i-1})(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-5])+$$

$$+(1,85\cdot 0,6^{i-1})(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-5])\Bigg)$$

$$y[k]=\varepsilon[k](-12,5)+10\sum_{i=1}^{\infty}\Bigg((-2,46\cdot 0,4^{i-1})(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-5])+$$

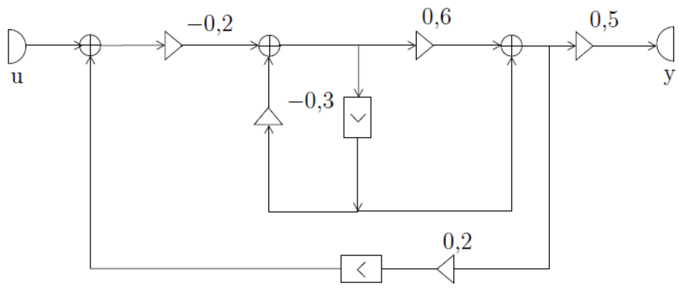
$$+10\sum_{i=1}^{\infty}(1,85\cdot 0,6^{i-1})(\varepsilon[k-i]-\varepsilon[k-i-5])\Bigg)$$

$$y[k]=\varepsilon[k](-12,5)+10\sum_{i=1}^{\infty}(-2,46\cdot 0,4^{i-1})\varepsilon[k-i]-10\sum_{i=1}^{\infty}(-2,46\cdot 0,4^{i-1})\varepsilon[k-i-5]+$$

$$+10\sum_{i=1}^{\infty}(1,85\cdot 0,6^{i-1})\varepsilon[k-i]-10\sum_{i=1}^{\infty}(1,85\cdot 0,6^{i-1})\varepsilon[k-i-5]$$

$$y[k]=\varepsilon[k](-12,5)+\varepsilon[k-1](61,5\frac{(0,4\cdot(0,4^{k}-1))}{-0,6}-61,5\frac{(0,4\cdot(0,4^{k-5}-1))}{-0,6}+$$

$$+30,8333333\frac{(0,6\cdot(0,6^{k}-1))}{-0,4}-30,8333333\frac{(0,6\cdot(0,6^{k-5}-1))}{-0,4})$$



1. ábra. Az adott rendszer

1.3. Jelfolyam hálózatok

1.3.1. Állapotváltozós leírás normál alakban

Folytonos idejű rendszer

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= -0,3x_1(t) - 0,2x_2(t) - 0,2u(t) \\
x_2'(t) &= 0,2 \cdot 0,6x_1'(t) + 0,2x_1(t) \\
y(t) &= 0,3(-0,3x_1(t) - 0,2x_2(t) - 0,2u(t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= -0,3x_1(t) - 0,2x_2(t) - 0,2u(t) \\
x_2'(t) &= -0,036x_1(t) + 0,2x_1(t) - 0,024x_2(t) - 0,024u(t) \\
y(t) &= 0,3(-0,3x_1(t) - 0,2x_2(t) - 0,2u(t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= -0,3x_1(t) - 0,2x_2(t) - 0,2u(t) \\
x_2'(t) &= 0,164x_1(t) - 0,024x_2(t) - 0,024u(t) \\
y(t) &= -0,09x_1(t) - 0,06x_2(t) - 0,06u(t))
\end{aligned}
$$

Diszkrét idejű rendszer

$$
\begin{aligned}
x_1[k+1] &= -0,3x_1[k] - 0,2u[k] - 0,2x_2[k] \\
x_2[k+1] &= 0,2 \cdot 0,6x_1[k+1] + 0,2x_1[k] \\
y[k] &= -0,09x_1[k] - 0,06x_2[k] - 0,06u[k]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1[k+1] &= -0,3x_1[k] - 0,2x_2[k] - 0,2u[k] \\
x_2[k+1] &= -0,036x_1[k] + 0,2x_1[k] - 0,024x_2[k] - 0,024u[k] \\
x_2[k+1] &= 0,164x_1[k] - 0,024x_2[k] - 0,024u[k] \\
y[k] &= -0,09x_1[k] - 0,06x_2[k] - 0,06u[k]
\end{aligned}
$$

Állapotváltozók mindkét rendszer esetén

$$A = \begin{pmatrix} -0,3 & -0,2 \\ 0,164 & -0,024 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -0,2 \\ -0,024 \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} -0,09 & -0,06 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -0,06 \end{pmatrix}$$

1.3.2. Stabilitás

$$det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} -0,3-\lambda & -0,2 \\ 0,164 & -0,024-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0,324\lambda + 0,04$$

$$\lambda_1 \approx -0,162 + 0,117j$$
$$\lambda_2 \approx -0,162 - 0,117j$$

Folytonos idejű rendszer A Hurwitz-kritérium szükséges, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabil legyen. A $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ alakra:

$$a > 0$$
$$b > 0$$

$$0.324 > 0$$
$$0.04 > 0$$

Látjuk, hogy teljesül a gerjesztés-válasz stabilitás feltétele. A rendszer aszomptotikusan stabil, mert $\Re\{\lambda_{1,2}\} < 0$.

Diszkrét idejű rendszer Jury-kritérium, ha a karakterisztikus polinom $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ alakú:

$$1 + a + b > 0$$
$$1 + - + b > 0$$
$$|b| < 1$$

$$1 + 0.324 + 0.04 > 0$$
$$1 - 0.324 + 0.04 > 0$$
$$|0.04| < 1$$

A Jury-kritériumnak megfelel, így gerjesztés-válasz stabil a rendszer. A rendszer aszomptotikusan stabil, mert $|\lambda_1| < 1$ és $|\lambda_2| < 1$.