

Kalkulus

Sáfár Orsolya

Parciális törtekre bontás

Példa

$$\int \frac{x^5}{x^2 + 1} = ?$$

Polinomosztással:

$$x^5 = (x^2 + 1)(x^3 - x) + x$$

Innen

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{x^2 + 1} &= \int \frac{(x^2 + 1)(x^3 - x) + x}{x^2 + 1} = \int x^3 - x + \frac{x}{x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C, \end{aligned}$$

ahol C tetszőleges valós konstans.

Másodfokú egyenlet megoldóképlete

Egy másodfokú polinom általános alakja:

$$ax^2 + bx + c$$

Megkereshetjük ezen kifejezés gyökeit, azaz a $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldásait a másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Másodfokú polinomok

A diszkrimináns, azaz $D = b^2 - 4ac$ előjelétől függően három esetet különböztethetünk meg:

- ▶ ha $D > 0$, akkor van két különböző valós gyök, ekkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ alakba írható. Ez utóbbi szorzatot nevezik gyöktényezős alaknak.
- ▶ ha $D = 0$, akkor a kifejezésnek egy valós gyöke van (azaz $x_1 = x_2$), és valójában a polinom teljes négyzet, ekkor
$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = a(x - x_1)(x - x_2).$$
- ▶ ha $D < 0$, akkor nincs valós gyök. Már tudjuk, hogy komplex gyökök azért vannak, méghozzá két darab, legyenek ők z_1 és z_2 .

Komplex gyökpár

Állítás: Ha a másodfokú egyenletnek komplex gyökei vannak, akkor segítségével felírható a gyöktényezős alak, azaz $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$.

Bizonyítás: Csak az $a = 1$ eseten számoljuk végig, azaz $x^2 + bx + c = (x - z_1)(x - z_2)$ -t bizonyítjuk. Ekkor a megoldóképlet:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Ekkor kibontva a gyöktényezős alakot

$$(x - z_1)(x - z_2) = x^2 - z_1x - z_2x + z_1z_2 = x^2 + x(-z_1 - z_2) + z_1z_2.$$

Másrészt

$$z_1 + z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -b$$

$$z_1z_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4c})}{2} \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4c})}{2} = \frac{b^2 - b^2 + 4c}{4} = c$$

Két valós gyök

Végül azt kaptuk, hogy a diszkrimináns értékétől függetlenül az $x^2 + bx + c$ polinom felírható $(x - x_1)(x - x_2)$ alakban, ahol x_1 és x_2 a polinom két gyöke (előfordulhat, hogy ezek komplex számok, vagy, hogy a kettő egybeesik).

Állítás: Tegyük fel, hogy $x^2 + bx + c$ -nek két különböző valós gyöke van és $px + q$ egy tetszőleges elsőfokú polinom. Ekkor

$$\frac{px + q}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

valamely alkalmas A és B konstansokkal. Ezt a felbontást nevezik **parciális törtekre bontásnak**.

Példa

Példa: Keressük meg a $\frac{x+1}{x^2-3x-10}$ parciális törtekre bontását!

Ehhez először határozzuk meg a nevező gyökeit, azaz oldjuk meg az $x^2 - 3x - 10 = 0$ egyenletet! Leggyorsabban a Viète-formulákból kaphatjuk meg őket. Keressünk két számot amik szorzata -10, összegük 3! Ez a $-2, 5$ számpár lesz, innen a gyöktényezős alak:

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5).$$

Előbbi tételünk szerint valamely alkalmas A és B konstansokra:

$$\frac{x+1}{x^2-3x-10} = \frac{x+1}{(x+2)(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-5}.$$

Most már csak A és B kiszámítása van hátra. Hozzunk közös nevezőre!

Példa - folytatás

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5) + B(x+2)}{(x+2)(x-5)}$$

A két nevező egyenlő, így a két tört csakis akkor lesz egyenlő minden x -re, ha a számlálók is egyenlőek, azaz

$$x + 1 = A(x - 5) + B(x + 2) = Ax - 5A + Bx + 2B$$

Mivel x szorzója a baloldalon 1, a jobboldalon pedig $A + B$, azaz $A + B = 1$ kell legyen. Másrészt a konstanstag a baloldalon 1 a jobboldalon $-5A + 2B$, innen $-5A + 2B = 1$. Ez egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer A -ra és B -re.

Példa - folytatás

Innen

$$\begin{aligned}A + B &= 1 \\ -5A + 2B &= 1\end{aligned}$$

Gauss-eliminációval megoldva:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \end{array} \right]$$

Majd visszahelyettesítéssel $B = \frac{6}{7}$, és $A = \frac{1}{7}$. Azaz a keresett felbontás:

$$\frac{1}{x^2 - 3x - 10} = \frac{\frac{1}{7}}{x + 2} + \frac{\frac{6}{7}}{x - 5}.$$

Példa

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x-10} dx = ?$$

Az előbbiek szerint:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-3x-10} dx &= \int \frac{\frac{1}{7}}{x+2} + \frac{\frac{6}{7}}{x-5} dx = \\ &= \frac{1}{7} \ln|x+2| + \frac{6}{7} \ln|x-5| + C, \end{aligned}$$

ahol C egy tetszőleges valós konstans.

Teljes négyzet (egy kétszeres valós gyök)

Tegyük fel, hogy $x^2 + bx + c$ -nek egyetlen valós gyöke van, azaz $D = 0$, azaz $b^2 = 4c$. Jelöljük ezt a gyököt x_1 -el, ekkor valójában a másodfokú kifejezés egy teljes négyzet, és

$$x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = (x - x_1)^2.$$

Állítás: Tegyük fel, hogy $x^2 + bx + c$ -nek egyetlen valós gyöke van, jelöljük ezt x_1 -el és legyen $px + q$ egy tetszőleges elsőfokú polinom. Ekkor a hányadosuk parciális törtekre bontható

$$\frac{px + q}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}$$

alakban valamely alkalmas A és B konstansokkal.

Példa

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = ?$$

Keressük meg a nevező gyökeit. Most $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, azaz a -1 most kétszeres gyök. Ekkor

$$\frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2}$$

alakban kereshetjük a parciális törtekre bontást. Közös nevezőre hozva:

$$\frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} = \frac{A(x + 1) + B}{(x + 1)^2}$$

Példa - folytatás

Innen a számlálók egyenlőségéből $Ax + A + B = 2x + 3$ adódik, azaz az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} A &= 2 \\ A + B &= 3 \end{aligned}$$

Azaz $A = 2$, $B = 1$. Azaz a keresett integrál

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2+2x+1} dx &= \int \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} dx = \\ &= \ln|x+1| + \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C, \end{aligned}$$

ahol C egy tetszőleges valós konstans.

Gyöktényezős alak

Egy n -edfokú polinom általános alakja:

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0$$

(amennyiben a főegyüttható 1).

Az algebra alaptétele kimondja, hogy egy n -edfokú polinomnak (x^n -a benne előforduló legnagyobb x hatvány) a komplex számok körében pontosan n gyöke van (multiplicitással számolva), jelölje ezeket $x_1, x_2, \dots, x_n$.

A gyökök segítségével felírhatjuk a gyöktényezős alakot:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

(előfordulhat, hogy ezen gyökök egy része komplex szám, továbbá az is hogy a gyökök egy része egybeesik).

Parciális törtekre bontás - valós egyszeres gyökök

Állítás: Legyen $p(x)$ egy olyan polinom, amelynek minden gyöke valós és egyszeres, jelöljük ezeket $x_1, x_2, \dots, x_n$ -el, $q(x)$ pedig egy tetszőleges legfeljebb $n - 1$ -edfokú polinom. Ekkor alkalmas $A, B, \dots, N$ konstansokkal

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots + \frac{N}{x - x_n}$$

Megjegyzés: Ennek segítségével bármilyen fokú polinomok hányadosa integrálható lesz, ugyanis ha $q(x)$ foka eredetileg $\geq n$, akkor a $q(x)$ maradékát kiszámoljuk $p(x)$ -el osztva polinomosztással, és a maradék foka már $< n$ lesz. A hányados pedig egy polinom, azt közvetlenül tudjuk integrálni.

Példa

Példa:

$$\int \frac{1}{x^3 - x} dx = ?$$

Keressük meg $x^3 - x$ gyöktényezős alakját, hogy szét tudjuk szedni integrálható törtekre a kifejezést! x -et ki tudunk emelni, és ekkor:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

Innen láthatjuk, hogy a minden gyök valós és egyszeres (a gyökök rendre $0, 1, -1$), így van olyan parciális törtekre bontás, ahol a nevezők elsőfokúak, azaz valamely A , B és C konstansokkal:

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

Hozzunk közös nevezőre!

Példa - folytatás

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

Innen a számláló:

$$A(x-1)(x+1) + Bx(x-1) + Cx(x+1) =$$

$$Ax^2 - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + Cx$$

Összevetve a két tört számlálóját (a nevezők most is egyenlőek):

$$0x^2 + 0x + 1 = x^2(A + B + C) + x(-B + C) - A$$

az együtthatók egyenlőségéből most is lineáris egyenletrendszert kapunk három ismeretlenre.

Példa - folytatás

Innen

$$A + B + C = 0$$

$$-B + C = 0$$

$$-A = 1$$

Gauss-eliminációval megoldva:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Majd visszahelyettesítéssel $C = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ és $A = -1$. Azaz a keresett felbontás:

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x + 1}.$$

Példa - folytatás

Innen az eredeti integrál:

$$\int \frac{1}{x^3 - x} dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} dx =$$
$$-\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C,$$

ahol C tetszőleges valós konstans.

Példa

$$\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^3 - x} dx = ?$$

Polinomosztással:

$$x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 2x - 1)(x^3 - x) + 1,$$

innen:

$$\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^3 - x} dx =$$

$$\int \frac{(x^2 + 2x - 1)(x^3 - x) + 1}{x^3 - x} dx =$$

$$\int x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{x^3 - x} dx =$$

$$\frac{x^3}{3} + x^2 - x + -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

ahol C tetszőleges valós konstans.

Parciális törtekre bontás - valós többszörös gyök

Állítás: Legyen $p(x)$ egy olyan 1 főegyütthatós polinom, amelynek minden gyöke valós és egyszeres, kivéve egyet, x_1 -et amely egy olyan valós gyök aminek multiplicitása k . Jelöljük a többi gyököt $x_2, x_2, \dots, x_m$ -el, ebben az esetben $p(x)$ gyöktényezős alakja $p(x) = (x - x_1)^k (x - x_2) \dots (x - x_m)$. $q(x)$ legyen egy tetszőleges legfeljebb $n - 1$ -edfokú polinom. Ekkor alkalmas $A, B, \dots, N$ konstansokkal

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{K}{(x - x_1)^k} + \frac{L}{x - x_2} + \dots + \frac{N}{x - x_m}$$

Példa

Példa:

$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} dx = ?$$

Keressük meg $x^3 - 2x^2 + x$ gyöktényezős alakját, hogy szét tudjuk szedni integrálható törtekre a kifejezést! x -et ki tudunk emelni, és ekkor:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$$

Innen láthatjuk, hogy a minden gyök valós és a 0 egyszeres, az 1 kétszeres gyök, így valamely A , B és C konstansokkal:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x}$$

Hozzunk közös nevezőre!

Példa - folytatás

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x} = \frac{Ax(x-1) + Bx + C(x-1)^2}{x(x-1)^2}$$

Innen a számláló:

$$Ax(x-1) + Bx + C(x-1)^2 = Ax^2 - Ax + Bx + Cx^2 - 2Cx + C$$

$$x^2(A+C) + x(-A+B-2C) + C$$

Összevetve a két tört számlálóját (a nevezők most is egyenlőek):

$$0x^2 + 0x + 1 = x^2(A+C) + x(-A+B-2C) + C$$

az együtthatók egyenlőségéből most is lineáris egyenletrendszert kapunk három ismeretlenre.

Példa - folytatás

Innen

$$\begin{aligned}A + C &= 0 \\ -A + B - 2C &= 0 \\ C &= 1\end{aligned}$$

Innen $C = 1$, $A = -1$ és végül $B = 1$. Azaz az eredeti integrál:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} dx &= \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x} dx = \\ &= -\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \ln|x| + C\end{aligned}$$

ahol C tetszőleges valós konstans.

Parciális törtekre bontás - komplex gyökpár esete

Megjegyzés: Ha az $z = a + ib$ komplex szám gyöke a $p(x)$ valós együtthatós polinomnak, akkor $a - ib$ is gyöke. Ezért a komplex gyökök mindig párokban (konjugált párokban) járnak. Az állítás bizonyítása azon múlik, hogy $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$.

Állítás: Legyen $p(x)$ egy olyan polinom, amelynek minden gyöke valós és egyszeres, kivéve kettőt, x_1 -et és x_2 -t amelyek komplexek, a többit jelöljük $x_3, x_4, \dots, x_n$ -el, $q(x)$ pedig egy tetszőleges legfeljebb $n - 1$ -edfokú polinom. Ebben az esetben $p(x)$ gyöktényezős alakja $p(x) = (x^2 + bx + c)(x - x_3) \dots (x - x_n)$, ahol $x^2 + bx + c$ -nek nincsen valós gyöke. Ekkor alkalmas $A, B, \dots, N$ konstansokkal

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} + \frac{C}{x - x_3} + \dots + \frac{N}{x - x_n}$$

Példa

$$\int \frac{2x+1}{x^3+x} dx = ?$$

Emeljünk ki x -et a nevezőből, ekkor

$$x^3 + x = x(x^2 + 1)$$

Azaz a nevezőnek a 0 egyszeres gyöke, az $x^2 + 1$ -nek pedig nincsen valós gyöke, mert $x^2 \geq 0$ minden valós számra. Ezek szerint

$$\frac{2x+1}{x^3+x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x}$$

alakban kell keresnünk a parciális törtekre bontást.

Példa - folytatás

Közös nevezőre hozva:

$$\frac{(Ax + B)x + C(x^2 + 1)}{x^3 + x} = \frac{Ax^2 + Bx + Cx^2 + C}{x(x^2 + 1)}$$

A másik oldalon a számláló $2x + 1$, így az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$A + C = 0$$

$$B = 2$$

$$C = 1$$

Innen $C = 1$, $B = 2$ és végül $A = -1$. Azaz a keresett integrál:

$$\int \frac{2x + 1}{x^3 + x} dx = \int \frac{-x + 2}{x^2 + 1} + \frac{1}{x} dx = \int \frac{-x + 2}{x^2 + 1} dx + \ln |x|$$

Példa - folytatás

Továbbá:

$$\begin{aligned}\int \frac{-x+2}{x^2+1} dx &= \int \frac{-x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} \ln|x^2+1| + 2 \arctan(x) + C\end{aligned}$$

Így végül

$$\int \frac{2x+1}{x^3+x} dx = -\frac{1}{2} \ln|x^2+1| + 2 \arctan(x) + \ln|x| + C,$$

ahol C tetszőleges valós konstans.

Improprius integrál - nem korlátos intervallum

Definíció:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx$$

amennyiben az utóbbi határérték létezik. Ha nem létezik a határérték, akkor azt mondjuk hogy az improprius integrál divergens.

Példa:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x^2} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} + 1 = 1$$

Azaz az improprius integrál létezik és értéke 1.

Improprius integrál - nem korlátos intervallum

Példa 2:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = ?$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(N) - \ln(1) =$$
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(N)$$

Mivel $\ln(x)$ a ∞ -ben ∞ -be tart, ezért ez az improprius integrál nem létezik.