ANALÍZIS(2) TÉTELEK

BME, VIK, Mérnök Informatikus szakos hallgatói részére, BSC

(A * -gal jelöltek bizonyításait nem kérdezzük.)

I. Differenciálegyenletek

(1) * Szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása.
(2) Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.
(3) Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak.
(4) Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. (Két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek).
(5) * Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyik megoldása megkereshető a konstans variálás módszerével.
(6) Új változó bevezetése elsőrendű differenciálegyenletbe.
(7) Partikuláris megoldás lokális vizsgálata a differenciálegyenlet hez tartozó iránymezőben, az izoklinák módszere.
(8) A differenciálegyenlet megoldásait közelítő Taylor polinomok számolása.
(9) * n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.
(10) * n-edrendű homogén lineáris diff.egy. megoldásainak tere n-dimenziós.
(11) n-edrendű homogén lineáris, konstans együtthatós differenciálegyenletnek létezik $e^{\lambda x}$ alakú megoldása (karakterisztikus polinom).
(12) * Ha egy valós együtthatós n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek megoldása a $z(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, ahol y_1, y_2 valós, akkor y_1 és y_2 is megoldások.
(13) * n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. (Két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek).
(14) * n-edrendű inhomogén lineáris diff.egyenlet partikuláris megoldásának keresése speciális zavarófüggvény esetén próbafüggvénnyel.
(15) * Fizikai és geometriai alkalmazások.

II. Lineáris rekurziók

(1) * Lineáris rekurzív egyenlet megoldásainak a tere.
(2) * Fibonacci tipusú egyenletek megoldásának egyértelműsége.
(3) * Fibonacci sorozat.(A rekurzió feloldása.)

III. Numerikus és függvénysorok

(1) A sor abszolút konvergenciájából következik a sor konvergenciája.
(2) Majoráns, minoráns kritérium.
(3) Hányados kritérium.
(4) * Hányados kritérium limeszes alakja.
(5) Gyök kritérium.
(6) * Gyök kritérium limeszes alakja.
(7) Függvénysor egyenletes konvergenciájából következik a pontonkénti konvergencia.
(8) Egyenletesen konvergens függvénysor teljesíti a Cauchy kritériumot.
(9) * Ha a függvénysor teljesíti a Cauchy kritériumot, akkor egyenletesen konvergens.
(10) Az egyenletes és abszolút konvergencia elégséges feltéle
(Weierstrass kritérium).

IV. Hatványsorok

(1) * Egy adott pontban konvergens hatványsor tulajdonsága.
(2) * Egy adott pontban divergens hatványsor tulajdonsága.
(3) * Hatványsor konvergenciatartománya intervallum.
(4) Formulák az R konvergenciasugárra $0 < R < \infty$ esetén.
(5) * Formulák az R konvergenciasugárra $R = 0$ és $R = \infty$ esetén.
(6) * Hatványsor abszolut és egyenletes konvergenciája.
(7) * Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.
(8) * Hatványsor összegfüggvényének integrálja.
(9) * Hatványsor tagonkénti deriválásával nyert sor konvergencia sugara.
(10) * Hatványsor összegfüggvényének deriválhatósága, a derivált hatványsora.
(11) A függvényt n-ed rendben érintő, legfeljebb n-ed rendű polinom egyértelműsége (Taylor polinom).
(12) Hatványsor alakban adott függvény Taylor sora. (Kapcsolat egy analitikus függvény és az a_k együtthatók között.)
(13) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$
(14) * Lagrange féle maradéktag alakja.
(15) A geometriai sorból levezethető Taylor sorok.
(16) $\ln(1+x), \arctan x$ függvények megegyeznek a Taylor soraikkal a $(-1, 1)$-on.
(17) Elégséges feltétel függvény és Taylor sorának egyenlőségére.
(18) Az e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{sh} x$ és a $\mathrm{ch} x$ függvény megegyezik a Taylor sorával a $(-\infty, \infty)$-on.
(19) Binomiális sor konvergencia tartományának sugara.
(20) * Binomiális sor összegfüggvénye.
(21) $f(x) = \arcsin x$ függvény megegyezik a Taylor sorával a $(-1, 1)$-on.
(22) Alkalmazások: függvényérték, integrál közelítő értékének számolása, a hiba becslése, határérték meghatározása.

V. Fourier sorok

(1) * A trigonometrikus rendszer ortonormáltsága, függetlenség.
(2) Az egyenletesen konvergens trigonometrikus sor együtthatóinak egyértelműsége. (Kapcsolat a ϕ összegfüggvény és az a_k, b_k együtthatók között.)
(3) A Fourier együtthatók kiszámítása.
(4) Összeg, konstansszoros Fourier sora.
(5) Páros és páratlan függvény Fourier sora.
(6) * Elegséges feltétel Fourier sor egyenletes konvergenciájára.
(7) * Dirichlet tétel (Fourier sor pontonkénti konvergenciája.)

VI. Többváltozós függvények folytonossága

(1) * n-dimenziós euklideszi tér pontsorozatainak koordinátánkénti konvergenciája.
(2) Többváltozós függvények limesze. Az átviteli elv alkalmazása (példák).
(3) * Többváltozós folytonos függvényekből összetett függvény folytonossága.
(4) * Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai (W. I., W. II., egyenletes folyt.).

VII. Többváltozós függvények differeciálhatósága

(1) Többváltozós függvény totális differenciálhatóságának és a folytonosságának a kapcsolata. (Tot. diffh.-ból következik a folytonosság, de a folytonosságból nem következik a tot. diffh.)
(2) Többváltozós függvény totális differenciálhatóságának és a parciális deriváltak létezésének a kapcsolata. (Tot. diffh.-ból következik a parciális deriváltak létezése, de a parciális deriváltak létezéséből nem következik a tot. diffh..)
(3) * A differenciálhatóság elégséges feltétele (parciális deriváltak folytonossága).
(4) Kétváltozós függvény grafikonjának (felület) érintősíkja.
(5) * Többváltozós függvények differenciálására vonatkozó láncszabály. (m-változósba egyváltozóst vagy két-három változósba két-három változóst helyettesítve.)
(6) Iránymenti derivált meghatározása (elégséges feltétel).
(7) A maximális illetve a minimális iránymenti derivált iránya és nagysága.
(A gradiensvektor iránya és nagysága.)
(8) * Young tétel.
(9) Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.
(10) * Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele (m=2).
(11) * Kompakt tartományon folytonos függvény abszolút szélsőértékének a számolása.

VIII. Többváltozós függvények integrálja

(1) * Kettős integrál és kétszeres integrál kapcsolata téglalapon.
(2) * Kettős integrál és kétszeres integrál kapcsolata normáltartományokon.
(3) * Kettős és hármas integrál transzformációja (polár, henger és gömbi koordináták).
(4) * $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx$ meghatározása.
(5) * Kettős és hármas integrál gyakorlati alkalmazása (terület, térfogat).

IX. Komplex változós komplex értékű függvények

(1) * Komplex függvény folytonossága.
(2) * Komplex $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény differenciálhatóságának szükséges és elégséges feltétele(Cauchy-Riemann egyenletek és $u$ill. v totális diff.hatósága).
(3) Komplex $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény differenciálhatóságának elégséges feltétele(Cauchy-Riemann egyenletek és u'_x, u'_y ill. v'_x, v'_y folytonossága).
(4) * Ha f reguláris egy pontban, akkor ott léteznek az $u(x,y) = Re(f(z))$ és $v(x,y) = Im(f(z))$ magasabb rendű parciális deriváltjai.
(5) Ha f reguláris, akkor az $u(x,y) = Re(f(z))$ és $v(x,y) = Im(f(z))$ megoldásai a síkbeli Laplace egyenletnek ($g''_{xx} + g''_{yy} = 0$), azaz u és v harmónikus.
(6) * Ha az $u(x,y)$ harmónikus, akkor létezik harmónikus társa, azaz létezik olyan f reguláris függvény hogy $u(x,y) = Re(f(z))$ és létezik $v(x,y)$, hogy $v(x,y) = Im(f(z))$.
(7) * Ha a $v(x,y)$ harmónikus, akkor létezik olyan f regulárisfüggvény hogy $v(x,y) = Im(f(z))$, azaz létezik $u(x,y)$, melynek $v(x,y)$ harmónikus társa.
(8) Az e^z periódikussága, értékkészlete.
(9) Az $\ln z$ értelmezési tartománya, értékkészlete, értékének meghatározása. (Az $\ln z$ valós és képzetes része.)
(10) e^z regularitása, deriváltja.
(11) Az $\sin z$, $\cos z$ értékének meghatározása. (A valós és képzetes részük.)
(12) A $\sin z, \cos z$ illetve a $\sinh z, \cosh z$ közötti kapcsolatok.
(13) * Komplex függvény görbe menti integráljának számolása:

$$\int_L f(z)\, dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

.

(14) * A Cauchy-Goursat féle alaptétel. (Reguláris függvény zárt görbe menti integrálja egyszeresen összefüggő tartományon nulla.)
(15) * A Cauchy-Goursat féle alaptétel következményei.
(16) $(z - z_0)^{-1}$ körintegrálja.
(17) $(z - z_0)^n$ körintegrálja (n=-2,-3,-4, ...).
(18) * Cauchy-féle integrálformula. (Reguláris függvény integrál alakja).
(19) * Cauchy-féle integrálformulák. (Reguláris függvény deriváltjainak integrál alakja).

Érvényes: 2008, tavaszi félév.

Fritz Józsefné, Kónya Ilona, Tasnádi Tamás

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék