121. Mik a kovariancia tulajdonságai?

1) $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$, vagyis kommutatív
2) $\mathrm{cov}(X,X)=\sigma^2(X)$
3) $\mathrm{cov}(\alpha X+\beta Y,Z)=\alpha\,\mathrm{cov}(X,Z)+\beta\,\mathrm{cov}(Y,Z)$
4) $\sigma^2(X\pm Y)=\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)\pm 2\cdot\mathrm{cov}(X,Y)$

122. Mi a feltételes eloszlásfüggvény definíciója?

A $\mathbf{P}(X=x\mid Y=y)=F_{X|Y}(x\mid y)\triangleq\frac{\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial y}}{f_Y(y)}$ kétváltozós függvényt az X-nek az Y-ra vonatkozó feltételes eloszlásfüggvénynek nevezzük.

123. Mi a feltételes sűrűségfüggvény definíciója?

A feltételes eloszlásfüggvény x-szerinti parciális derivált-függvényét az X-nek az Y-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényének nevezzük:

$$f_{X|Y}(x\mid y)\triangleq\frac{\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y\partial x}}{f_Y(y)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

124. Mi a lineáris regresszió képlete?

X és Y valószínűségi változók lineáris regresszióján azt az a^*Y+b^* valószínűségi változót értjük, amire $\mathbf{E}\big(X-(a^*Y+b^*)\big)^2$ minimális értékű.

$$a^*=\mathbf{R}(X,Y)\cdot\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\,,\qquad b^*=\mathbf{E}(Y)-\mathbf{R}(X,Y)\cdot\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\cdot\mathbf{E}(X)$$

125. Mi a feltételes várható érték definíciója diszkrét esetben?

Az X-nek az Y-ra vett feltételes várható értékén az $\mathbf{E}(X\mid Y)$ valószínűségi változót értjük, melynek eloszlása: $\mathbf{P}(\mathbf{E}(X\mid Y)=i)=\sum_{\forall k:i=\mathbf{E}\{X_k\}}\mathbf{P}(Y=y_k)$.

126. Mi a feltételes várható érték definíciója folytonos esetben?

Az X-nek az Y-ra vett feltételes várható értékén az $\mathbf{E}(X\mid Y)=r(Y)$ valószínűségi változót értjük, ahol:

$$r(y)=\int_{-\infty}^{\infty}u\,f_{X|Y}(u\mid v)\,du=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}u\,f_{X,Y}(u,v)\,du}{f_Y(v)}$$

127. Mik a korrelációs együttható tulajdonságai?

1) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{R}(X,Y)=0$
2) Ha X és Y szórásnégyzetei léteznek, akkor $-1\le\mathbf{R}(X,Y)\le 1$
3) Ha X és Y szórásnégyzetei léteznek, úgy $\mathbf{R}(X,Y)=\pm 1 \iff \exists a,b\in\mathbb{R}:\mathbf{P}(X=a\cdot Y+b)=1$

128. Mi a kapcsolat a függetlenség és a korrelálatlanság között?

Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ és $\mathbf{R}(X,Y)=0$.

129. Mikor korrelálatlan két valószínűségi változó?

Az X és Y valószínűségi változók korrelálatlanok, ha:

$\mathrm{R}(X,Y)=cov(X,Y)=\mathbf{E}(X\cdot Y)-(\mathbf{E}X)\cdot(\mathbf{E}Y)=0.$

130. Mik a feltételes várható érték tulajdonságai?

4) $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X\mid Y)\big)=\mathbf{E}X$
5) $\mathbf{E}(h(Y)\cdot X\mid Y)=h(Y)\cdot\mathbf{E}(X\mid Y)$
6) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X\mid Y)=\mathbf{E}X$

131. Ha X, Y együttes eloszlása normális, akkor mi az X-nek az Y-ra vett regressziós összefüggése?

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x \mid y)\, dx = \mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \varrho \cdot (y - \mu_2)$$

132. Mi a kapcsolat a függetlenség és a korrelálatlanság között kétdimenziós normális esetben?

Ha X és Y együttes eloszlása normális, akkor X és Y akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok.

133. Mik a kovariancia-mátrix tulajdonságai?

$\underline{\underline{\Sigma}}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, azaz $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^T$ és $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^p$-re $\underline{a}^T \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{a} \geq 0$.

134. Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X \mid Y) =$?

Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X \mid Y) = \mathbf{E}X$.

135. Ha $X = \alpha Y + \beta$, akkor $R(X, Y) =$?

Ha X és Y szórásnégyzetei léteznek, úgy $\mathbf{R}(X, Y) = \pm 1 \iff \exists a, b \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = a \cdot Y + b) = 1$

136. Mi a kritériuma annak, hogy egy valószínűségi változó szórása 0 legyen?

A valószínűségi változó legyen konstans.

137. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke 1 legyen?

A két valószínűségi változó között lineáris kapcsolat legyen (egyenes arányosság).

138. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke –1 legyen?

A két valószínűségi változó között lineáris kapcsolat legyen, de ellentétes (fordított arányosság).

139. Mondjon példát olyan valószínűségi változókra, melyek korrelálatlanok, de nem függetlenek!

140. Milyen eloszlásnál lesz a regresszió lineáris?

Normális eloszlás esetén.

$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = aY + b,$ ahol $a = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} f$ és $b = \mu_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} f \mu_2$

141. Adja meg az Y-nak az X-re vonatkozó lineáris regresszió képletét, amikor X és Y függetlenek!

142. Mondjon példát Markov-láncra!

$X_1, X_2, \dots, X_n \in S$ állapottér esetén, ha $\forall n \geq 1$-re:

$\mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$, akkor a valószínűségi változó-sorozat Markov-lánc.

143. Mivel egyenlő $\mathbf{cov}(X - Y,\ X + Y)$?

$\operatorname{cov}(X + Y, X - Y) = \operatorname{cov}(X, X) + \operatorname{cov}(Y, X) - \operatorname{cov}(X, Y) - \operatorname{cov}(Y, Y) = \operatorname{cov}(X, X) - \operatorname{cov}(Y, Y) =$
$= \sigma^2(X) - \sigma^2(Y)$

144. Mivel egyenlő $\mathbf{cov}(X, X)$?

$\sigma^2(X)$

145. Mondja ki a nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakját!

Legyenek X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak ($\mathbf{E}(X_i) = p$). Ekkor: $r_n(A) \overset{st}{\to} \mathbf{P}(A)$, vagyis:

$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(|r_n(A) - \mathbf{P}(A)| > \epsilon) = 0, \qquad \forall \epsilon > 0$

146. Mondja ki a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakját!

Legyenek X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Létezik közös várható értékük ($\mathbf{E}(X_i) = \mu$) és közös szórásnégyzetük.

Legyen $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$Ekkor: $Z_n \overset{st}{\to} \mu$, vagyis:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|Z_n - \mu| > \epsilon) = 0, \qquad \forall\epsilon > 0$$

147. Mondja ki a nagy számok törvényének Kolmogorov-féle alakját!

Legyenek X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Létezik közös várható értékük ($\mathbf{E}(X_i) = \mu$) és közös szórásnégyzetükre: $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2(X_i) \cdot \frac{1}{i^2} < \infty$.

Legyen $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$, amire: $Z_n \overset{1v}{\to} \mu$, vagyis:

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} Z_n = \mu\right) = 1$$

148. Mondja ki a Moivre-Laplace tételt!

Legyenek X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak. Létezik közös várható értékük ($\mathbf{E}(X_i) = p$) és közös szórásnégyzetük $\big(p(1-p)\big)$.

Legyen $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Ekkor: $Z_n \overset{e}{\to} Z$, ahol $Z \in N(0,1)$, vagyis:

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x), \qquad n \longrightarrow \infty, x \in \mathbb{R}$$

149. Mondja ki a centrális határeloszlás tételt!

Legyenek X_i valószínűségi változók páronként függetlenek és azonos eloszlásúak. Létezik közös várható értékük ($\mathbf{E}(X_i) = \mu$) és közös szórásnégyzetük.

Legyen $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$. Ekkor: $Z_n \overset{e}{\to} Z$, ahol $Z \in N(0,1)$, vagyis:

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \longrightarrow \Phi(x), \qquad n \longrightarrow \infty, x \in \mathbb{R}$$

150. Adja meg a karakterisztikus függvény fogalmát!

Adott X valószínűségi változó $F_X(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx}\, dF_X(x), \qquad \varphi_X(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$