Valószínűségszámítás vizsga
Műszaki informatikus BSc
2015. január 7.

1. Egy magasugró versenyen a versenyzők $0,8$ valószínűséggel ugorják át a lécet az induló magasságon. Mindenki háromszor próbálkozhat. Ha 20 versenyző indul, akkor jelöljük X-szel sikertelen ugrások számát. Számolja ki X várható értékét.
Megoldás: X_i az i-edik versenyző sikertelen ugrásainak a száma a kezdő magasságon,
$R_{X_i} = \{0, 1, 2, 3\}, \mathbf{P}(X_i = 0) = 0,8; \mathbf{P}(X_i = 1) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16;$
$\mathbf{P}(X_i = 2) = 0,04 \cdot 0,8 = 0,032;.$
$\mathbf{P}(X_i = 3) = 0,008$
$\mathbf{E}X_i = 1 \cdot \mathbf{P}(X_i = 1) + 2 \cdot \mathbf{P}(X_i = 2) + 3 \cdot \mathbf{P}(X_i = 3) = 0,248$
$X = \sum_{i=1}^{20} X_i$ az összes sikertelen ugrások száma. $\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{20} \mathbf{E}X_i = 20 \cdot \mathbf{E}X_1 = 4,96.$

2. Egy király esélyt ad egy elítéltnek a megmenekülésre. Ehhez az elítéltnek bekötött szemmel három urnából kell egy-egy golyót húznia, majd a három kihúzott golyót egy negyedik urnába helyezik az őrök. A negyedik urnából ismét kell egy golyót húznia a bekötött szemű elítéltnek, aki megmenekül, ha ez a golyó fehér. Mekkora a megmenekülés valószínűsége, ha az urnákban a különböző színű golyók száma a következő:

	fehér	piros	fekete
1. úrna	2	5	3
2. úrna	5	2	3
3. úrna	3	3	4

Megoldás: A negyedik úrnába a "feltöltés" négy-féleképpen történhet: A_0, A_1, A_2, A_3, ahol $A_i$az az esemény, hogy i db fehér került bele.
$\mathbf{P}(A_0) = 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,28,$
$\mathbf{P}(A_1) = 0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0,47$
$\mathbf{P}(A_2) = 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 0,22,$
$\mathbf{P}(A_3) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,03.$
Jelölje F azt az eseményt, hogy a feltöltött úrnából fehéret húzunk.
$\mathbf{P}(F \mid A_0) = 0, \mathbf{P}(F \mid A_1) = \frac{1}{3}, \mathbf{P}(F \mid A_2) = \frac{2}{3}, \mathbf{P}(F \mid A_3) = 1.$
A teljes valószínűség tételéből:
$\mathbf{P}(F) = \frac{1}{3} \cdot 0,47 + \frac{2}{3} \cdot 0,22 + 0,03 = \frac{1}{3}.$

3. Egy berendezésben három alkatrészt kapcsoltak össze sorosan. Ha az alkatrészek bármelyike meghibásodik, akkor a berendezés leáll. Mennyi a berendezés működési idejének várható értéke, ha a beépített alkatrészek egymástól teljesen független exponenciális eloszlásúak, $\lambda_i = i$ paraméterekkel? $(i = 1, 2, 3)$.

Megoldás: Jelölje Y a berendezés működési idejét, X_i pedig az i-edik alkatrész idejét. A feltétel szerint $X_i \in E(i)$, (teljesen) függetlenek. A soros összekapcsolás miatt $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$. $\mathbf{P}(Y < t) = 1 - \mathbf{P}(X_1 \geq t) \cdot \mathbf{P}(X_2 \geq t) \cdot \mathbf{P}(X_3 \geq t) = 1 - e^{-6t}, t > 0$.
Azaz $Y \in E(6)$! Így $\mathbf{E}Y = \frac{1}{6}$.

4. Számoljuk ki a maximum likelihood-becslést az $f(x) = \vartheta x^{-\vartheta-1}, 1 < x$, sűrűségfüggvényű eloszlásnál (Pareto-eloszlás) a $\vartheta > 0$ paraméterre!
   Megoldás: $L(x_1, x_2, ..., x_n; \vartheta) = \prod\limits_{i=1}^{n} \vartheta \cdot x_i^{-\vartheta-1} = \vartheta^n \cdot \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{-\vartheta-1}$
   $l(x_1, x_2, ..., x_n; \vartheta) = n \cdot \ln\vartheta - (\vartheta + 1) \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i$
   $\frac{\partial l}{\partial \vartheta} = \frac{n}{\vartheta} - \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i = 0 \Longrightarrow \vartheta = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i}$.
   $\frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta^2} = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0 \Longrightarrow$ maximum!

5. Az X, Y valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye
   $f_{X,Y}(u,v) = 2\left(u^3 + v^3\right)$, ha $0 \leq u, v \leq 1$. $\mathbf{E}(Y \mid X) = ?$
   Megoldás: $f_X(u) = \int\limits_0^1 2\left(u^3 + v^3\right) dv = 2\left[u^3 v + \frac{v^4}{4}\right]_0^1 = 2u^3 + \frac{1}{2}, u \in (0,1)$
   $f_{Y|X}(v \mid u) = \frac{f_{X,Y}(u,v)}{f_X(u)} = \frac{u^3+v^3}{u^3+0{,}25}$
   $\mathbf{E}(Y \mid X = u) = r(u) = \int\limits_0^1 v f_{Y|X}(v \mid u)\, dv = \int\limits_0^1 v \cdot \frac{u^3+v^3}{u^3+0{,}25} dv = \frac{1}{u^3+0{,}25}\left[\frac{v^2}{2}u^3 + \frac{v^5}{5}\right]_0^1 = \frac{0{,}5u^3+0{,}2}{u^3+0{,}25}$
   $\mathbf{E}(Y \mid X) = \frac{0{,}5X^3+0{,}2}{X^3+0{,}25}$.

6. Mondja ki a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvényét!
   Megoldás: Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ teljesen független, véges szórású valószínűségi változók, ahol $\mathbf{E}X_i = m$ és $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\sigma}^2 X_i}{i^2} < \infty$.
   Akkor $\mathbf{P}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\right) = 1$.