Előszó: Amíg nem megy a LaTeX képletek renderelése a wikin, addig ezt feltöltöm PDF-ben is, ide: :File:jelek_jegyzet_vilmosnagy_latex.pdf

A félévben tervezem letisztázni ide a Jelek (Rendszerelmélet) jegyzeteimet - lehetőleg valami olyan formában, ami az első ZH előtt segít rendesen összefoglalni az anyagot, s egy ponthatáros kettest összehoz.

Ha a félév végéig sikerül rendesen csinálnom (igyekszem :-)), s legalább az első ZHig (~hetedeik hét) le van tisztázva az anyag, akkor közkincsé teszem, s mehet a Rendszerelmélet lap alá. Addig viszont szeretném a személyes játszóteremnek meghagyni (nemhiába szerkesztői subpage ez), s bármit hezitálás nélkül vissza-vonok, ami nem tetszik. Ha hibát találsz, vagy kérdésed van, a Vitalapon állok rendelkezésre. (vagy a vilmos.nagy@outlook.com email címen)

1. előadás - Bevezetés

Bevezetés

A tárgy keretében *fizikai* folyamatokat szeretnénk leírni. A fizikait értsd, hogy kb. bármilyen olyan folyamatot, amiben mérhető mennyiségek szerepelnek. Ezeket a mennyiségeket változókkal írjuk le. Ezekből a változókból, ha fizikai dimenzió nélkül kezeljük, lesznek a jeleink. Ilyen folyamat lehet, például:

- Az egyetem egyes évfolyamaira beiratkozott hallgatók száma.
- Híd deformációja a terhelés függvényében
- Lift sebessége a magasság függvényében, ha az ötödik emeletre akarunk menni.
- stb.

Rendszerek ábrázolása

Az alábbi ábrán egy egyszerű rendszer ábrázolása látható.

(szerk.: Remélem nem csesztem el benne semmit, az x[k], meg x[k+1] jelölés nem tuti. http://draw.io-n rajzolva, forrás itt: https://drive.google.com/open?id=0BzSJOKSJE6qqUUlwZVk0T3JYYUU)

(szerk.: Amíg nincs LaTeX a vikwiki-n, s PDF-ben olvasod, addig a kép itt: https://vik.wiki/images/7/79/Jelek_jegyzet_vilmosnagy_rendszerek_%C3%A1br%C3%A1zol%C3%A1sa.png)

Példa

A fenti rajz lehet az ábrája az alábbi rendszer-modellnek.

Egy egyszerű egyetemet, s az egyetemen tanuló hallgatók számát szeretnénk modellezni. Négy jelet veszünk fel: x_1, x_2, x_3, y. Ebből az x-ek az adott évben az adott évfolyamra járó hallgatók száma, míg az y az adott évben végző hallgatók száma. Az x_1 értéke egyenlő az adott évben beiratkozó hallgatók és az előző évben az első évfolyamot nem teljesítő hallgatók számával. Amennyiben az újonnan beiratkozókat u-val jelöljük, míg az egyes évfolyamokon megbukottakat a-val, sikeresen teljesítőket b-vel (ezt most önkényesen jelölöm a illetve b-vel):

- $x_1[k+1] = a_1 \cdot x_1[k] + u[k+1]$
- $x_2[k+1] = a_2 \cdot x_2[k] + b_1 \cdot x_1[k]$
- $x_3[k+1] = a_3 \cdot x_3[k] + b_2 \cdot x_2[k]$
- $y[k] = b_3 \cdot x_3[k]$

(szerk.: remélem semmit nem írtam el, de ezt a gyakorlat után még utánaszámolom. Amíg nem javítják meg a wiki-t, addig itt le tudod renderelni ezeket: http://quicklatex.com/)

Ebből ilyen szép táblázatot lehet rajzolni, ha:

- $u[k] = 500$ minden k-ra
- $a_n = 0.3$ minden n-re
- $b_n = 0.65$ minden n-re

(vegyük észre, hogy $a_k + b_k$ nem szükségszerűen 1. A maradékot kirúgták, elment, etc. belefér a modellbe).

Félév (k)	Elsőévesek	Másodévesek	Harmadévesek	Végzők
1	500	0	0	0
2	650	325	0	0
3	695	520	211	0
4	709	608	401	137
5	713	643	515	260
5	714	656	572	335

Nem számolom tovább, de ha ügyes vagy, néhány félév múlva egy ~konstans értékre kéne beállnia a végzősök számának (~400 körül, valahol). Ez a tárgy ilyen (meg ennél bonyolultabb) modellekről, s azoknak az ennél egyszerűbb kiszámolásáról fog szólni.

Egyébként such wow, a fenti felállásban az u a gerjesztés, az y pedig a felvázolt rendszer válasza, s primitív rendszereket kell is majd hasonlóan számolgatni a háziban.

Jelek osztályozása

Millióféleképpen lehet jeleket osztályozni. Ebből én csak azt jegyzetelem le, amivel foglalkozik a tárgy, a többi nem érdekes.

Beszélhetünk időben folytonos, vagy diszkrét idejű jelekről.

- Folytonos idejű, jelölése $x(t)$
- Diszkrét idejű, jelölése $x[t]$

Továbbá általában determinisztikus, belépő típusú jelekkel foglalkozik a tárgy.

- Determinisztikus: minden értéke *megjósolható* (nem véletlenszerű)
  ez nyilván nem így hangzik matematikusul, de nekünk jó lesz
- Belépő: $x(t) = 0$ minden $t > 0$ esetén.

Említés szintjén előkerül sztochasztikus (nem determinisztikus), nem belépő, x-ben belépő, diszkrét értékű, etc. jelek. Ezekkel nem foglalkozik a tárgy, de kis gondolkodással megfejtheted, melyik micsoda.

Továbbá megkülönböztetünk páros és páratlan jeleket:

- páros: $x(t) = x(-t)$ (az x tengelyre szimmetrikus)
- páratlan: $x(t) = -x(-t)$ (az origóra szimmetrikus)

Állítás: Minden jel felírható egy páros és egy páratlan jel összegére.
Bizonyítás: Nem bizonyítjuk.

Jelek felírása

Diszkrét idejű jelek esetén

Speciális jelek

Egységimpulzus

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Egységugrás

$$\epsilon[k] = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

Állítás: Minden DI jel megadható egységimpulzusok szuperpozíciójaként.
Bizonyítás: Nem bizonyítjuk.

Példa 1

Az egységugrás felírható egységimpulzusok összegeként: $\epsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta[i]$ *(szerk.: ezt ellenőrizd le!)*

Példa 2

Vegyük a következő jelet:

$$x[k] = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 2 \cdot 0.1^k & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ezt fel tudjuk írni egy sorban így:

$x[k] = \sum_{i=0}^{\infty} 2 \cdot 0.1^i * \delta[k-i]$.

Itt ugye a $\delta[k-i]$ csak a $k = i$ esetben lesz 1, minden más esetben 0. Ezt kicsit tovább csavarva:

$x[k] = \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i]$.

Mivel fentebb már kimondtuk, hogy ennek csak $k = i$ esetben van értelme. Így meg, az egyszerűsítések után egy triviális dolgot kapunk, miszerint:

$x[k] = x[k]$

DE!

Konvolúció

Tegyük fel, hogy a rendszerek válasza is szuperpozícióinálható. Ezt így nem mondtuk ki általánosan előadáson, hogy minden esetben igaz, de használjuk a tárgy keretein belül. Továbbá tegyük fel, hogy egy rendszer egységimpulzusra adott válaszát *h[k]*-val jelöljük.

Na, és itt jön a magic, mert (az előző példa gondolatmenetét részben folytatva) ezek után ki merjük mondani, hogy a rendszer $y[k]$ válasza általánosságban:

$y[k] = \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \cdot h[k-i]$

Vegyük észre, hogy összesen az egységimpulzust cseréltük le fent a válaszára, majd ugyanúgy szuperponáljuk az egyes egységimpulzusokat.

Ennek pedig van gyakorlati haszna is. Ha szeretném kiszámolni, hogy egy terem hogyan lesz akusztikusan jó (mondjuk a színházban leghátul, visszhang nélkül hallatszik a színész hangja), akkor:

- egységimpulzussal *gerjesztem* a termet (tapsolok),
- lemérem *leghátul* a terem által adott impulzusválaszt,
- számolok, hogy milyen választ adna a terem a színész hangjának a gerjesztésére.

Folytonos idejű jelek esetén

Speciális jelek

Egységugrás

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Megjegyzés: Az $\epsilon(0)$-t nem definiáljuk, a tárgy keretében nem lesz rá szükség. Ha szeretnénk elképzelhetjük 0.5-nek, balról/jobbról 0/1-nek, etc.

Egységimpulzus

Írjuk fel az $\epsilon(t,T)$ függvényt a következőképpen:

$$\epsilon(t,T) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/T & t \in (0,T) \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Ez 0-tól T-ig *1/T* értékű négyzet. $\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t,T)dt = 1$

Az egységimpulzust nevezzük annak, ha az $\epsilon(t,T)$-ben a T tart nullához.