

FOLYADÉKOK

A nagy örvények táplálják a kisebbeket - sebességüket emésztik a súrlódás - a kicsik pedig a még kisebbeket, folyvást, míg létrejön a viszkozitás

LEVIS RICHARDSON
Az energia be- és kiáramlása a légköri örvényekbe c. dolgozat összefoglalása (1920)

17.1 Bevezetés

Ennek a fejezetnek két fő témája van: nyomás a nyugvó folyadékban, és nyomásváltozás az áramló folyadékban. A *hidrodinamika* a technikának az az ága, amely az áramló folyadékokkal, az *aerodinamika* az amely áramló gázokkal foglalkozik. Targyalásunk a legegyszerűbb esetekre fog szorítkozni. Ebben a fejezetben csak kevés új fizikai fogalmat vezetünk be, de érdekes példát jelent majd a Newton törvénynek és az energiamegmaradási törvénynek egy alkalmazása új fizikai körülményekre.

Az anyagról általában azt mondják, hogy *szilárd* vagy *folyékony* állapotban van. Az a szó, hogy *folyadék*, a folyás (mozgás, áramlás) képességére utal, ezért magában foglalja mind a cseppfolyós anyagokat (ezek a köznapi értelemben vett folyadékok), mind a gázokat. Az anyag másik halmazállapotát, a nagy ionizáltságú, pozitív és negatív részecskéket azonos mennyiségben tartalmazó gázt **plazmának** nevezik. (A plazmát néha a folyadék, speciális típusának tekintik.) Az utóbbi időben a plazma tulajdonságait – a magfúziós reakciók szabályozhatóságára irányuló törekvés részeként – intenzíven kutatják.

Ez a széles osztályozás azonban túlságosan leegyszerűsíti a helyzetet. Bizonyos esetekben a folyadék és a gáz (vagy a folyadék és a szilárd anyag) között egyáltalán nem éles a határ. Néhány „szilárdnak” ismert anyagot, pl. az üveget, helyesebb nem teljesen megszilárdult folyadéknak minősíteni. Nincs olyan szilárd anyag, ami tökéletesen merev lenne. Továbbá a szilárd anyagok nagy része jól megkülönböztethető alakokban létezik, különböző olvadásponttal, sűrűséggel és fajhővel. Pl. a szilárd szénnek három különböző módosulata van, és a jégnek hét különböző fázisa létezik.

Az említett bonyolult kérdésekkel nem foglalkozunk a továbbiakban. Helyette az **ideális folyadék**¹ – az összenyomhatatlan és tökéletesen viszkozitásmentes, azaz súrlódásmentes folyadék – viselkedését vizsgáljuk.

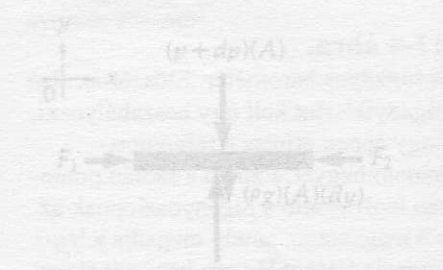
¹ A valódi folyadékok között a víz azok közé tartozik, amelyek jól megközelítik az ideális folyadékot, legalábbis mérsékelt nyomás és áramlási sebesség esetében.

17-1 táblázat
 Néhány anyag sűrűsége
 (10³ kg/m³)

Alumínium	2,70
Bronz	8,6
Réz	8,96
Föld (átlagos)	5,52
a vízben	9,2
a levegőben	2,8
Üveg	
kristályos	2,4-2,6
amorf	2,0-2,9
Arany	19,3
Granit	2,7
lég (0 °C)	0,917
Vas	7,87
Ólom	11,35
Bzár	10,20
Acél	7,8
Úránium	18,9
Pa (fém)	20,0
Folyadékok	
Aceton	0,791
Etilalkohol	0,791
Szén-tetraklorid	1,587
Glicerin	1,26
Víz	1,000
0 °C-on	1,000
100 °C-on	0,958
Temperatúra	1,022



17-1 ábra



17-1 ábra
 Nyomás. Balra: a hőbőrső cső...
 szálal csökkenti a hőszigetelést...
 nyomás, hogy az erő nagysága...
 felületre osztva az erő...
 Eredőhővel, hogy egy 100 kg-os...
 kisebb nyomás...
 mint egy 25 kg-os...
 vektorábrák

17-1 táblázatNéhány anyag sűrűsége
(10^3 kg/m^3)

<i>Szilárd anyagok</i>	
Alumínium	2,70
Bronz	8,6
Réz	8,96
Föld (átlagos)	5,52
a magban	9,5
a kéregben	2,8
Üveg	
közönséges	2,4–2,6
flint	2,9–5,9
Arany	19,3
Gránit	2,7
Jég (0 °C)	0,917
Vas	7,87
Ólom	11,35
Ezüst	10,50
Acél	7,8
Uránium	18,9
Fa (dió)	~0,65
<i>Folyadékok</i>	
Aceton	0,791
Etilalkohol	0,791
Széntetraklorid	1,587
Glicerin	1,26
Higany	13,55
Víz	
0 °C-on	1,000
100 °C-on	0,958
Tengervíz	1,025

A **viszkozitás** az a tulajdonság, amelynek révén a folyadékok és a gázok a bennük mozgó tárgyakra ellenállást fejtenek ki. Az ilyen ellenállási erők nagysága nem állandó, hanem függ a sebességtől. Például, ha sűrű olajba ejtünk egy kicsiny fémgolyót, akkor az hamarosan állandó **végsebességet** ér el, azt a sebességet, amely mellett a viszkózus ellenállási erő egyenlő a golyóra ható gravitációs erővel. Így az eredő erő zérus, és a test gyorsulás nélkül esik. A viszkozitás az egymáson csúszó folyadék- vagy gázrétegeken fellépő ellenállási erővel is kapcsolatban van.

17.2 A sűrűség

Mint már említettük, az anyag ρ sűrűségét így határozzuk meg:

$$\text{Sűrűség} \quad \rho \equiv \frac{m}{V} \quad (17-1)$$

ahol m a V térfogatot betöltő anyag tömege. Az „ideális” folyadékról feltételezzük, hogy sűrűsége minden nyomáson állandó marad. A víz esetében ez ésszerű feltevés, minthogy kb. 200-szoros légköri nyomás szükséges egy adott térfogat 1%-os összenyomásához.

Valamely anyag vízre vonatkoztatott **relatív sűrűségét** az anyag sűrűségének és a víz sűrűségének hányadosaként definiáljuk. Minthogy ez két sűrűség hányadosa, ezért ez dimenzió nélküli mennyiség:

$$\text{Relatív sűrűség} \quad s \equiv \frac{\rho}{\rho_{\text{víz}}} \quad (17-2)$$

A 17-1 táblázat tételei 10^3 kg/m^3 egységben vannak megadva. Mivel a víz-mérték sűrűsége $1,000 \text{ kg/m}^3$, azért a táblázat adatai relatív sűrűségnek is tekinthetők.

17-1 ábra.

Nyomás. Balra: a hótaposó cipők azáltal csökkentik a hóra gyakorolt nyomást, hogy az erőt nagyobb felületen osztják szét. Jobbra: Előfordulhat, hogy egy 100 kg-os férfi kisebb nyomást gyakorol a talajra, mint egy 55 kg-os nő.



Folyadékok, legalfőbb mértékű nyomás és áramlási sebesség esetében.

17.3 A nyomás

Tekintsük most a folyadék és a tartály között lévő érintkezési felületet! A tartály a folyadék felületére csak *merőleges* irányban tud erőt kifejteni. Ez a megállapítás abból a feltételezésből adódik, hogy a folyadék sűrűdásmentes. Tehát, ha a folyadék tangenciális erő hatásának lenne kitéve, a folyadék „rétegei” sűrűdás nélkül elcsúsznának egymáson. Így az ideális folyadék tangenciális erőnek nem tud ellenállni, és megfordítva, nem tud tangenciális erőt kifejteni bármilyen vele érintkező felületre sem. Csak a felületre merőleges erő kifejtésére képes.

Ezt a megfontolást a folyadék belső tartományaira is kiterjeszthetjük. Tekintsünk valahol a folyadék belsejében egy tetszőlegesen irányított elemi felületet. A környező folyadék csak merőleges erőt fejthet ki erre a felületre. Így célszerűnek látszik a folyadékban ható p nyomást az elemi ΔA felületre kifejtett ΔF erővel kifejezni:

$$\text{Nyomás} \quad p \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (17-3)$$

Annak ellenére, hogy az erő vektormennyiség, a nyomást *skalár* mennyiségként definiáljuk, minthogy nincs kitüntetett iránya. Mértékegysége erő/felület egységgel mérjük, ez SI rendszerben newton per négyzetméter (N/m^2), hivatalos neve *pascal* (Pa).² Néhány más mértékegységet a (17-7) egyenlet sorol fel.

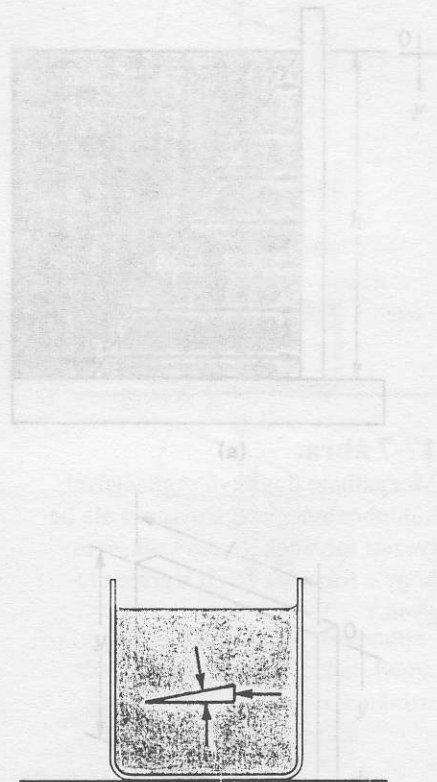
A folyadékok belsejében a nyomásnak nincs kitüntetett iránya. Ezt az alábbi példa illusztrálja. Tekintsünk egy folyadékba merült keskeny, tömör éket (17-2 ábra). Ha a folyadék és az ék sűrűsége egyenlő, akkor az ék nem süllyed le, nem is emelkedik fel: egyensúlyban van. A folyadék az ékre olyan erőket fejt ki, amelyek mindig merőlegesek a felületre, *tekintet nélkül az ék helyzetére*. Tehát a folyadék adott pontjában a nyomásnak nincs kitüntetett iránya.

A következőkben megmutatjuk, hogy a nyugvó folyadékban a nyomás két tényezőtől függ: a folyadék felszínén lévő nyomástól és a felszíntől számított mélységtől. Tekintsük a folyadék kicsiny elemi térfogatát a felszín alatt h mélységben (17-3a ábra). Az elemi térfogat vékony derékszögű hasáb, tömege dm , vastagsága dy . Mindkét vízszintes felületének területe A . A térfogat nyugalomban van, ezért a rá ható erők összege zérus. Az erő minden esetben merőleges a felületre, nagysága a nyomás és a felület nagyságának szorzatával egyenlő.

A 17-3b ábra a hasábra ható erők vektorábráját mutatja. A vízszintes erőkomponensek összege a szimmetria miatt zérus. A függőleges erők összege is zérus kell, hogy legyen, de ebbe az összegbe a hasábra ható gravitációs erő is be kell számítani. Ez az erő $(dm)g = (\rho A dy)g$. A hasáb alsó felületére ható erő (pA) , a felső felületre pedig $(p+dp)(A)$ erő hat, ahol dp a hasáb alsó és felső felülete között lévő infinitézimális nyomáskülönbség. Tehát a hasábra ható függőleges erők összege:

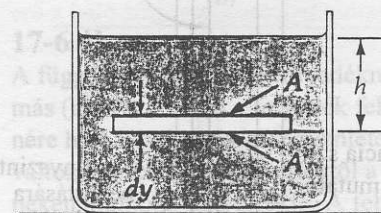
$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ pA - (p + dp)A - \rho g A dy &= 0 \\ dp &= -\rho g dy \end{aligned} \quad (17-4)$$

Válasszuk a függőleges távolság zérus szintjének a folyadék felszínét, és pozitívnak a felfelé mutató irányt! Ekkor, lefelé haladva dy változása ne-

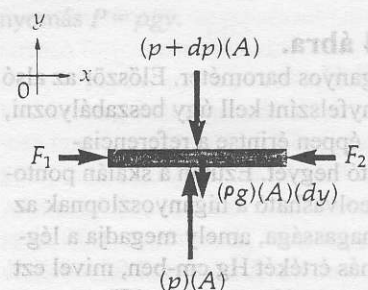


17-2 ábra.

A folyadék olyan erőt fejt ki a beme-rülő testre, amely mindenütt merőleges a test felületére.



(a)



(b)

17-3 ábra.

(a) Az A területű, dy vastagságú, vékony, vízszintes lemezalakú elemi folyadéktérfogat. (b) Az (a) ábrán bemutatott elemi térfogatra ható erők vektorábrája.

² A francia filozófus-természettudós Blaise Pascal (1623–1662) tiszteletére, aki a hidrodinamikában jelentőset alkotott.

17-1 táblázat
Néhány anyag sűrűsége
(10³ kg/m³)

Szilárd anyagok	
Alumínium	2,70
Bronz	8,6
Réz	8,96
Föld (átlagos)	5,52
a magban	9,5
a kéregben	2,8
Üveg	
közönséges	2,4–2,6
flint	2,9–5,9
Arany	19,3
Gránit	2,7
Jég (0 °C)	0,917
Vas	7,87
Ólom	11,35
Ezüst	10,50
Acél	
Uránium	
Fa (dio)	

Folyadékok

Aceton	
Etilalkohol	
Szénhidrogén	
Glicerin	
Tengeri víz	

gativ, és a (17-4) egyenletben a negatív előjel biztosítja, hogy dp változása pozitív legyen. Így a folyadék felszíne alatt tetszőleges h mélységben a p nyomás

$$\int_{p_0}^p dp = \int_{y=0}^{y=-h} -\rho g dy \quad (17-5)$$

$$p - p_0 = \rho gh$$

Nyomás a nyugvó folyadékban $p = p_0 + \rho gh$ (Ha a ρ sűrűség állandó.)³ (17-6)

ahol p_0 a nyomás a felszínen, és h a folyadékfelszín alatti távolság, pozitív számmal kifejezve.

Adott esetben lehetséges, hogy a p_0 felszíni nyomás megegyezik az **átlagos atmoszféra nyomás** értékével, (1 atm) de ettől el is térhet.⁴

Átlagos atmoszféra nyomás

$$1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

[pascal (Pa) a nyomás SI egysége] (17-7)

$$= 1013 \text{ millibar}$$

$$= 76,0 \text{ higanycentiméter (Hg cm)}$$

A meteorológusok a helyi légköri nyomást gyakran *bar* egységben fejezik ki. Definíció szerint 1 bar = 10⁵ N/m². Így az átlagos atmoszféra nyomás 1013 millibar. A (17-7) egyenlet másik kifejezése a „Hgcm” rövidítést használja a „higany-centiméter” helyett. Ez a szóhasználat abból a tényből ered, hogy az átlagos atmoszféra nyomás a higanyos barométerben (17-4 ábra) 76,0 cm magas higanyoszlop nyomásával tart egyensúlyt. De jól jegyezzük meg, hogy a nyomás alapvető mértékegysége az *erő per felületegység*, és nem a higanyoszlop centiméterben mért magassága.

A technikában praktikus, kényelmi okból a nyomásmérő műszerek úgy vannak beállítva, hogy zérus értéket mutatnak, amikor a nyomás 1 atm. Így az általános gyakorlat kétfajta nyomást különböztet meg: **abszolút-nyomást** (a fizikában egyszerűen csak *nyomás*) és **műszer-nyomást** (nyomás mínusz 1 atm). Az 1 atm -nál kisebb műszer-nyomás számértéke negatív.

17-1 PÉLDA

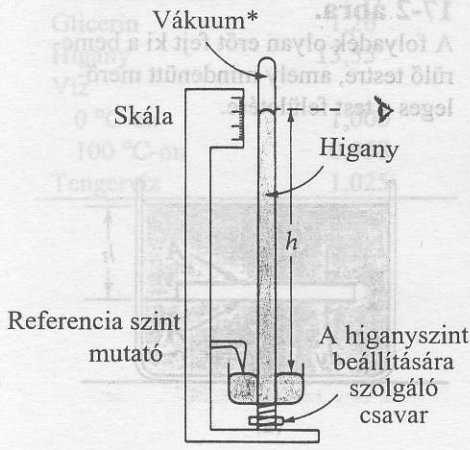
Egy medence méretei 4,5 m × 9 m. A medencét $h = 3$ méter magasan vízzel töltik fel. (a) Mekkora erőt fejt ki a víz a medence fenekére? (b) Mekkora a nyomás a fenéken? (c) Mekkora erőt gyakorol a víz a 4,5 m széles oldalfalra? A példában csak a vizet vegyük tekintetbe, a légnyomást hanyagoljuk el. (Megjegyzés: 1 köbméter víz súlya 10⁴ N.)

MEGOLDÁS

(a) Minthogy a medence keresztmetszete állandó, azért a víz által a fenékre kifejtett erő a víz súlyával egyenlő:

$$\left(\frac{\text{Súly}}{\text{Térfogat}} \right) (\text{Térfogat}) = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} (4,5 \text{ m})(9 \text{ m})(3 \text{ m}) = 1,215 \times 10^6 \text{ N}$$

³ A (17-6) egyenlet nem alkalmazható a légkörre, mert a légkör sűrűsége változik a nyomással.
⁴ A legtöbb embert meglepi, hogy a légnyomás a testének felszínére négyzetméterenként mintegy 10 tonna erőt fejt ki. Persze ezt a nyomást kiegyensúlyozza a test belsejéből származó nyomás, és közvetlenül nem érzékeljük. De ha a külső nyomás gyorsan változik, akkor rossz érzést okozhat az, hogy a középfül képtelen elég gyorsan kompenzálni a dobhártya külső oldalán bekövetkezett nyomásváltozást. Például egy magas épület felvonójában, vagy rosszul tömített repülőgép utasfülkéjében a gyors magasságváltozás kényelmetlen érzést okozhat. A nyomáskülönbség kiegyenlítését az ásítás vagy a nyelés néha segíti.



17-4 ábra. A higanyos barométer. Először az alsó higanyfelszínt kell úgy beszabályozni, hogy éppen érintse a referenciamutató hegyét. Ezután a skálán pontosan leolvasható a higanyoszlopnak az h magassága, amely megadja a légnyomás értékét Hg cm-ben, mivel ezt a higanyoszlopot a szabad Hg-felszínre ható légnyomás tartja egyensúlyban. Ez Pascal törvénye.

* A valóságban itt nincs tökéletes vákuum, hanem inkább nagyon alacsony nyomású higanygőz. A legtöbb esetben, a szokásos hőmérséklet mellett – a nagyon pontos méréseket leszámítva – az ebből adódó eltérés elhanyagolható.

(b) A fenéknymás (a légnyomás figyelembevétele nélkül)

$$p = \rho gh = \left(10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right)(3 \text{ m}) = 3 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

(c) Az oldallapon a nyomás egyenletesen változik a felső zérus értéktől az alsó ρgh értékig (lásd a 17-6 ábrát). A csak a víztől származó p nyomás y mélységben

$$p = \rho gy.$$

A dA elemi felületre ható dF erő

$$dF = p dA = \rho gyl dy.$$

Így az erő összege:

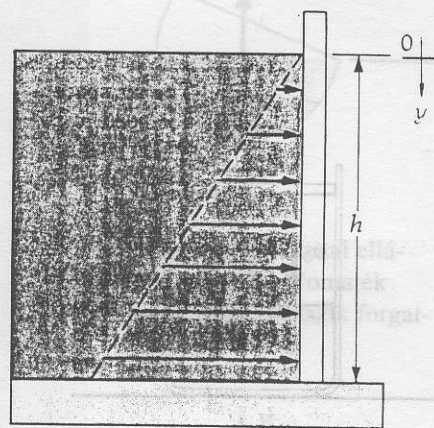
$$F = \int dF = \int_0^h \rho gyl dy = \frac{\rho gh^2 l}{2}$$

$$= \frac{\left(10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right)(3 \text{ m})^2(4,5 \text{ m})}{2} = 4,05 \times 10^5 \text{ N}.$$

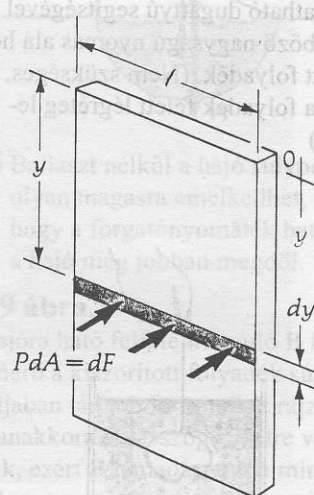
Más megoldás (c) Minthogy a medence oldalfalának szélessége végig azonos, a p nyomás az y mélységgel egyenletesen változik. Így a $p_{\text{át}}$ átlagnyomás a vízmélység felében lévő nyomással, vagyis $\rho gh/2$ -vel egyenlő. Az átlagnyomást az oldallap egész területével szorozva kapjuk az erőt:

$$F = (p_{\text{át}})(\text{Terület}) = \left(\frac{\rho gh}{2}\right)(hl) = \frac{\rho gh^2 l}{2}.$$

(Jegyezzük meg, hogy ez a módszer nem alkalmazható, ha az oldalfal szélessége változik a mélységgel.)



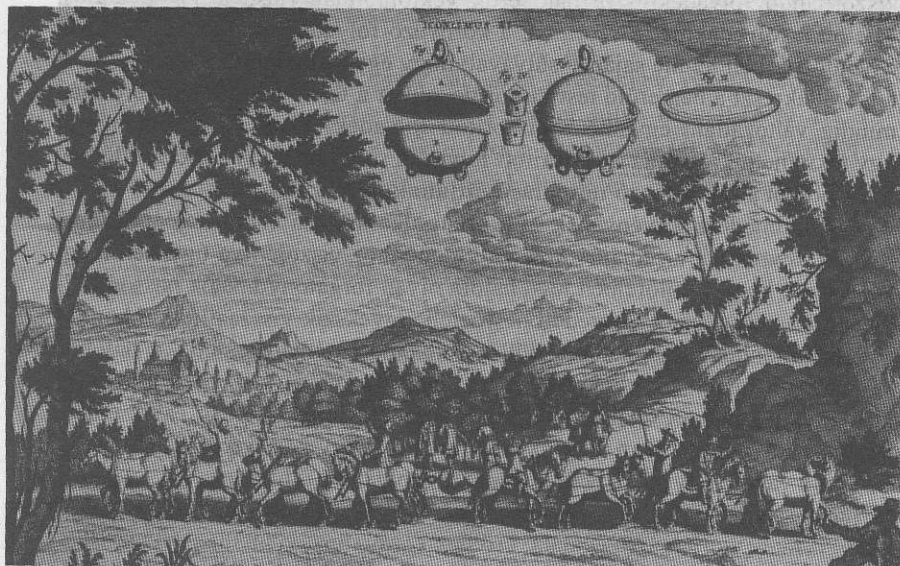
(a)



(b)

17-6 ábra.

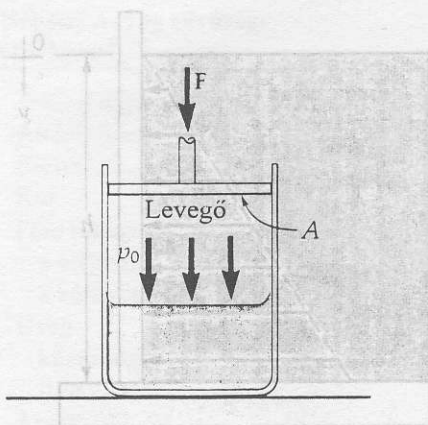
A függőleges falra ható folyadéknyomás (nem számolva a folyadék felszínére ható légnyomással) egyenletesen változik a felszíni zérus értéktől a fenéken uralkodó ρgh értékig. A felszín alatt y mélységben elhelyezkedő $dA = l dy$ vízszintes elemi felületnél a nyomás $P = \rho gy$.



17-5 ábra.

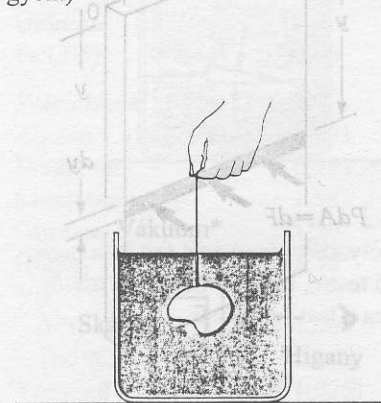
1650-ben egy német mérnök, Otto von Guericke elsőként szerkesztett olyan szivattyút, amellyel zérushoz közeli nyomást lehetett előállítani. Magdeburgban úgy igazolta az atmoszféra meglepően nagy nyomását, hogy két összeillesztett 51 cm átmérőjű fém félgömböt

evakuált, és bemutatta, hogy 16 ló sem tudja szét húzni a félgömböket. Kétség kívül tisztában volt azzal, hogy a kétfelé húzó 16 ló látványa drámaibb hatású, mintha az egyik félgömbjénél fogva állványhoz erősített eszközt az ugyanekkorát erősítő 8 lóval próbálták volna szét húzni.

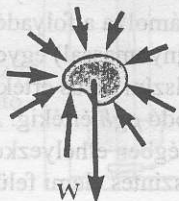


17-7 ábra.

Mozgatható dugattyú segítségével különböző nagyságú nyomás alá helyezett folyadék. (Nem szükséges, hogy a folyadék felett légréteg legyen.)



(a)



(b)

17-8 ábra.

A bemerülő test saját térfogatával megegyező folyadékmennyiséget szorít ki. Mielőtt ez a folyadékmennyiség kiszorult volna, a környező folyadék erőt gyakorolt rá, amint ezt a (b) rész-ábra mutatja. A környező folyadéktól származó erők eredője a felfelé mutató felhajtóerő, ami pontosan egyensúlyt tart a folyadék W súlyával. Ha most ezt a folyadékmennyiséget a bemerülő testtel helyettesítjük, a felfelé mutató felhajtóerő ugyanaz marad: a kiszorított folyadék W súlyával egyenlő nagyságú és ellenkező irányú.

17.4 Pascal törvénye és az Arkhimédész törvény

Ha a folyadék zárt edényben van, akkor egy dugattyúval tetszőleges külső nyomást gyakorolhatunk rá a 17-7 ábrán sematikusán vázolt módon. Továbbra is alkalmazható a (17-6) egyenlet. Ha a bezárt levegő súlyát elhanyagoljuk, a levegő csupán arra szolgál, hogy a dugattyútól származó erőt a folyadékhoz közvetítse. Nyilvánvaló, hogy a levegőnek nem kell jelen lennie ahhoz, hogy a (17-6) egyenlet érvényes legyen. Azt a tényt, hogy a folyadék nyomása bármely mélységben a folyadékra kívülről ható állandó p_0 nyomást is magába foglalja, Blaise Pascal fedezte fel.

PASCAL TÖRVÉNYE

Zárt edényben lévő folyadéokra gyakorolt nyomás a folyadék minden részére és az edény falára ugyanolyan mértékben adódik át.

A folyadékokra vonatkozó másik fontos elvet Arkhimédész (Kr.e. 287-212) fedezte fel. Azt kívánta megállapítani, hogy vajon a király koronája tömör aranyból, vagy csalárd módon ezüsttel ötvözött aranyból készült-e. A koronát sem megfűrnia, sem másként megsértenie nem volt szabad. Az elvet állítólag akkor fedezte fel, amikor fürdés közben karjának és lábának látszólagos súlycsökkenését észlelte. Vett a korona tömegével azonos tömegű arany- és ezüsttömböt. Miután mindet víz alá merítve megmérte, a korona súlyvesztését a két tárgy súlyvesztése közöttinek találta. Ezzel kiderült, hogy az „arany” korona valójában részben kisebb sűrűségű fémből készült. (A korona készítője nagy bajban volt.) Arkhimédész módszere a fürdőkádban tett felfedezésen alapult.

ARKHIMÉDÉSZ TÖRVÉNYE

Minden, részben vagy teljesen folyadékba merülő testre a kiszorított folyadék súlyával egyenlő felhajtóerő hat.

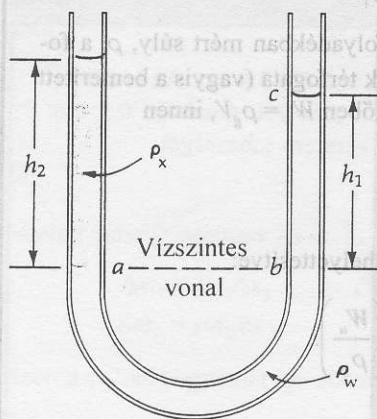
A törvény nyilvánvalóvá válik, ha elkészítjük a majdan bemerülő test által kiszorítandó folyadékrészre ható erők vektorábráját, (lásd a 17-8b ábrát). Mielőtt a folyadékrész kiszorulna, a környező folyadék által rá ható erők egyenlőnek kell lennie saját W súlyával, hogy egyensúlyban legyen. Ha most a folyadékrészt a bemerülő test kiszorítja, akkor a testre ható felhajtóerő még mindig változatlan: egyenlő a kiszorított folyadék súlyával. A felhajtóerő úgy tekinthetjük, mintha a kiszorított folyadék súlypontjában koncentrálna. Ezt a pontot a **felhajtóerő támadáspontjának** nevezzük.

Arkhimédész törvényének gyakorlati alkalmazása van a hajóépítésben. A hajó súlypontját a felhajtóerő támadáspontjához viszonyítva úgy kell megválasztani, hogy a dőlőfélben lévő hajóra olyan forgatónyomaték hasson (17-9a ábra) amely a hajót az eredeti helyzetébe igyekszik visszaállítani. Amikor a hajó különböző szöggel megdől, a felhajtóerő támadáspontja a hajóhoz viszonyítva általában eltolódik, mert megváltozik a kiszorított folyadék alakja. Egy kenuban felállni különösen veszélyes, mert a kenu és az ember együttes súlypontja olyan magasra emelkedhet, hogy könnyen előállhat a 17-9b ábrán vázolt helyzet. További példával szolgál a 17-11 ábra.

Ismeretlen folyadék sűrűségének mérésére egyszerű módszer a következő. Ha vizet tartalmazó U alakú cső egyik szárába a víznél kisebb sűrűségű folyadékot töltünk, akkor a folyadékszintek a 17-10 ábrán láthatóhoz hasonlóan helyezkednek el. Az a pont a víz és a kisebb sűrűségű folyadék közös szintje. Az a és b pontok egyenlő mélyen vannak a vízben a c pont alatt, így ugyanakkora nyomáson vannak. Ez a **nyomás csak a folyadéktól származik:**

$$p_a = p_b = \rho_w g h_1 \quad (17-8)$$

ahol ρ_w a víz sűrűsége. (Itt nem vesszük számításba a levegő nyomását, azaz minden kifejezés műszer-nyomás értéket jelent.)



17-10 ábra.

Egy U alakú csőbe vizet töltöttek; ezután a cső bal oldali szárába kisebb sűrűségű folyadékot töltöttek.

De a nyomás a -ban a h_2 mélységgel és az ismeretlen folyadék ρ_x sűrűségével is kifejezhető:

$$p_a = \rho_x g h_2 \quad (17-9)$$

A két fenti egyenletet ρ_x -re megoldva:

$$\rho_x = \rho_w \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \quad (17-10)$$

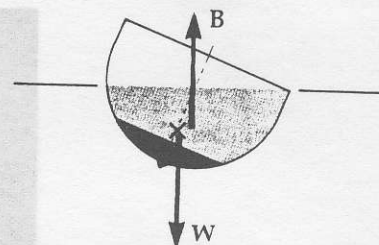
A 17-2 példában Arkhimédész törvényét használhatjuk egy ismeretlen folyadék sűrűségének meghatározására.

17-2 PÉLDA

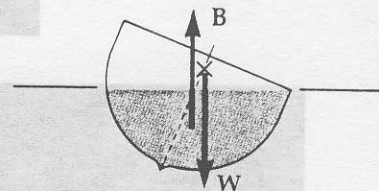
Kicsiny, $\rho_g = 2,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ sűrűségű üveghenger vékony drótszálra kötve mérlegben függ. Levegőben a henger súlya $W_a = 0,15 \text{ N}$. Ha a henger teljesen bemerül a folyadékba, a látszólagos súlya $W_1 = 0,08 \text{ N}$. Határozzuk meg a folyadék ρ_1 sűrűségét! A levegő felhajtóerejét hanyagoljuk el!

MEGOLDÁS

Az üveghenger látszólagos súlycsökkenése a folyadéktól származó felhajtóerő következménye:



(a) A jól tervezett (ballasztal ellátott) hajó a forgatónyomaték egyenes állásba igyekszik forgatni.



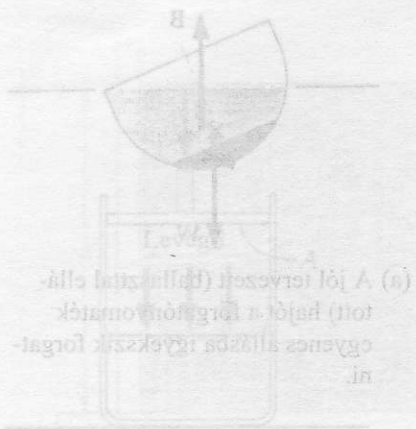
(b) Ballaszt nélkül a hajó súlypontja olyan magasra emelkedhet, hogy hogy a forgatónyomaték hatására a hajó még jobban megdől.

17-9 ábra.

A hajóra ható felfelé irányuló B felhajtóerő a kiszorított folyadék súlypontjában támad. Itt mindkét rajz ugyanakkora dőlésszögű esetre vonatkozik, ezért B támadáspontja mindkét esetben ugyanott van. A W gravitációs erő a hajó súlypontjában (\times) támad. Szimmetrikus felépítésű hajónál a (\times) pont a hajó (szaggatott vonallal jelölt) középvonalán van. A (b) ábra esetében, ha a hajónak nincs ballasztja, a (\times) pont sokkal magasabban van. (A hajó fedélzet fölötti felépítményét az ábra nem mutatja.) Ez a pont elég magasan lehet ahhoz, hogy az eredő forgatónyomaték az (a) részábrához tartozó forgatónyomatékkal ellentétes irányú legyen, aminek kellemetlen következményei lehetnek.

17-11 ábra.

Amidőn a 480 tonna űrtartalmú „Piero Riero Gambini” 1952 január 26-án vízre bocsátották, Teduccióban, Itáliában valaki elfelejtette beszerelni a hajó egyenes helyzetben tartásához szükséges ballasztot. Amikor a hajó felborult, ötvennél többen estek vízbe, és mindegyikük komoly sérülést szenvedett.



17-7 ábra.

(a) A fél görgyöt (ball) a folyadékban tartott állapotban a felülről ható levegőben mért súly W_a és a lefelől ható folyadékban mért súly W_l közötti különbség az elmozdított folyadék súlyával egyenlő.

(b) Ballast nélkül a hajó súlypontja olyan magasra emelkedhet, hogy a forgatónyomaték hatására a hajó még jobban megdől.

17.4 Pascal-törvénye (az Arkhimédész-törvény)

$$W_a - W_l = \rho_l V$$

ahol W_a a levegőben mért súly, W_l a folyadékban mért súly, ρ_l a folyadék sűrűsége, V a kiszorított folyadék térfogata (vagyis a bemerített henger térfogata). A henger súlya levegőben $W_a = \rho_g V$, innen

$$V = \frac{W_a}{\rho_g}$$

Ezt az eredményt az előbbi kifejezésbe helyettesítve:

$$W_a - W_l = \rho_l \left(\frac{W_a}{\rho_g} \right)$$

ρ_l -re megoldva:

$$\rho_l = \left(\frac{W_a - W_l}{W_a} \right) \rho_g = \left(\frac{0,15 \text{ N} - 0,08 \text{ N}}{0,15 \text{ N}} \right) \left(2,5 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$$

$$= 1,17 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

17.5 Folyadékok áramlása

A folyadékok dinamikája összetett probléma. Az alábbi leíró jellegű szakkifejezések a folyadékáramlás különleges típusainak jellemzésére használatosak:

nem stacionárius	vagy	stacionárius
összenyomható	vagy	összenyomhatatlan
súrlódásos	vagy	súrlódásmentes
örvényes	vagy	örvénymentes

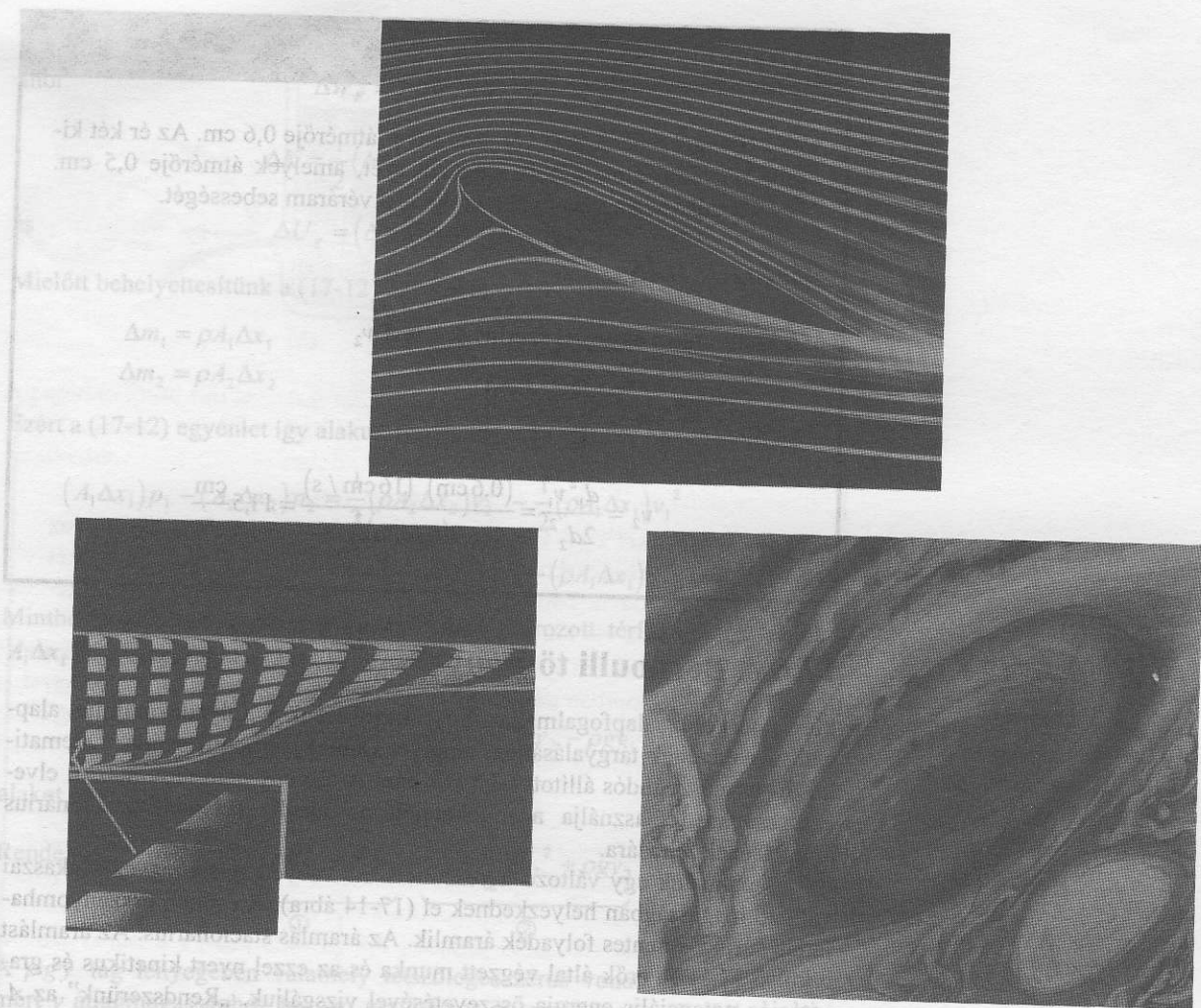
Elsősorban azokat az egyszerűbb eseteket fogjuk tárgyalni, amelyek a fenti párok jobb oldali szakkifejezéseivel kapcsolatosak.

Minthogy a folyadék anyaga nem merev, ezért a folyadék erősen turbulens mozgásra is képes, olyanra, amikor a különböző részecskék pályagörbéi annyira bonyolultak, hogy pontos matematikai leírásuk nem megoldható. **Stacionárius áramlásról** akkor beszélünk, ha az áramlási sebesség a tér minden pontjában az időben állandó. A stacionárius áramlás általában akkor lép fel, ha az áramlás örvénymentes és az áramlási sebesség viszonylag kicsiny.

A folyadékok áramlásának leírására használjuk az **áramvonal** fogalmát. Az áramvonalak stacionárius áramlás esetében kirajzolják a folyadék bármely adott részecskéjének pályagörbáját. Az áramvonalat az a tulajdonsága határozza meg, hogy minden pontjában az érintője az adott pontbeli sebesség irányába esik.⁵ Az áramvonalak láthatóvá tételére számos ügyes technikai megoldást találtak, néhányat a 17-12 ábra illusztrál. Ha az áramvonalak jól definiáltak, és a turbulencia következtében nem kuszálódnak össze, az áramlást **lamináris áramlásnak** mondjuk [a latin *lamina* („vékony lemez”, „réteg”) alapján].

Az áramlás örvénymentes, ha a folyadék bármely kis elemének impulzusmomentuma a tömegközéppontján átmenő bármely tengelyre zérus. Ha

⁵ Nem stacionárius áramlaskor a sebesség változik az idővel és az áramvonalak nem esnek szükségszerűen egybe a folyadék-részecskék pályagörbéivel.



17-12 ábra.

Néhány, az áramlást láthatóvá tevő módszer.

örvények, forgók vannak jelen, az áramlás *örvényes*. Az ilyen bonyolult esetekkel nem foglalkozunk.

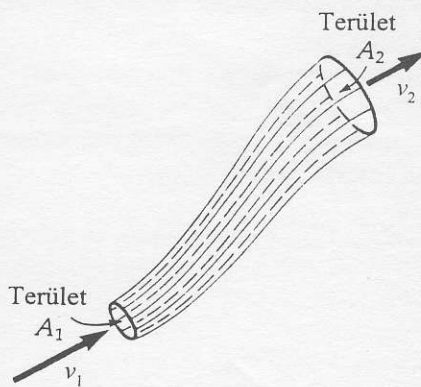
Egy áramvonal nyaláb *áramfonalat* képez, (17-13 ábra). A fonal külső határának áramvonalai egyfajta „csövet” alkotnak (*áramcső*), mert lamináris áramlás esetében egyetlen belső áramvonal sem metszi a határt képező áramvonalakat. Az áramcső A_1 keresztmetszetű egyik végén belépő áramvonalaknak az A_2 keresztmetszetű másik végén mind ki kell lépniük.

Ha a folyadék összenyomhatatlan, ρ sűrűsége mindenütt állandó. Így az áramcső egyik végén egységnyi idő alatt belépő folyadéktérfogatnak egyenlőnek kell lennie a másik végén egységnyi idő alatt kilépő folyadéktérfogattal. A Δt idő alatt belépő folyadék az A_1 keresztmetszetet $v_1 \Delta t$ távolsággal tolja el, tehát a belépő folyadékmennyiség térfogata $A_1 v_1 \Delta t$. Hasonlóképpen, a cső másik végén Δt idő alatt $A_2 v_2 \Delta t$ térfogat lép ki. A két térfogatot egyenlővé téve, $A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$, és Δt -vel osztva megkapjuk a *kontinuitási egyenletet*:

Kontinuitási egyenlet

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (17-11)$$

Az egyenlet mutatja, hogy a sebesség ott nagyobb, ahol a keresztmetszet kisebb.



17-13 ábra.

Az áramlási cső a belsejében áramló folyadékkal. Összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásakor a beáramló folyadékmennyiség egyenlő a kiáramló folyadékmennyiséggel. Matematikailag ezt a jelenséget az $A_1 v_1 = A_2 v_2$ *kontinuitási egyenlet* írja le.

17-3 PÉLDA

Egy 16 cm/s sebességgel vért szállító ér átmérője 0,6 cm. Az ér két kisebb, egyenlő átmérőjű érré ágazik szét, amelyek átmérője 0,5 cm. Határozzuk meg a vékonyabb erekben a véráram sebességét.

MEGOLDÁS

A kontinuitási egyenlet szerint $A_1 v_1 = A_2 v_2$

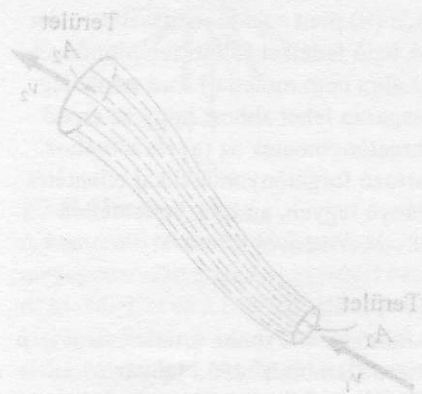
$$\frac{\pi d_1^2 v_1}{4} = 2 \left[\frac{\pi d_2^2 v_2}{4} \right]$$

$$v_2 = \frac{d_1^2 v_1}{2 d_2^2} = \frac{(0,6 \text{ cm})^2 (16 \text{ cm/s})}{2(0,5 \text{ cm})^2} = 11,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

17.6 A Bernoulli törvény

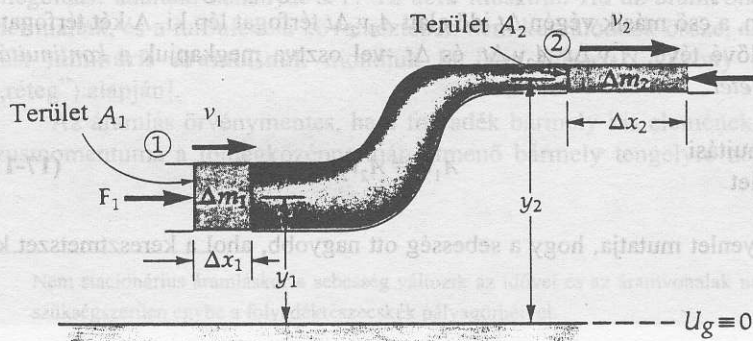
Megismerve az alapfogalmakat, hozzákezdhetünk a folyadékáramlás alapvető törvényének tárgyalásához, amelyet Daniel Bernoulli svájci matematikus és természettudós állított fel 1738-ban. A törvény nem tartalmaz új elvet, csupán felhasználja a munkatételt az ideális folyadék stacionárius áramlásának leírására.

Tekintsünk egy változó keresztmetszetű csövet. A cső egyes szakaszai változó magasságban helyezkednek el (17-14 ábra). A csőben összenyomhatatlan sűrűdésmentes folyadék áramlik. Az áramlás stacionárius. Az áramlást a külső F_1 és F_2 erők által végzett munka és az ezzel nyert kinetikus és gravitációs potenciális energia összevetésével vizsgáljuk. „Rendszerünk” az A_1 és az A_2 területű keresztmetszetekkel határolt csőszakaszban lévő folyadék. Az összes munka- és energiaátvitel csupán a cső végében lévő Δm_1 és Δm_2 elemi tömegekre vonatkozik, a közbülső folyadék állapota és energiája, ha az áramlás stacionárius, azonos marad. A Δt időtartam alatt a külső F_1 erő Δx_1 távolságra mozdul el, és a rendszeren $F_1 \Delta x_1$ munkát végez. Ennek hatására a Δm_1 tömeg magasabb y_2 szintre kerül, ahol a (Δm_1 -gyel egyenlő) Δm_2 tömeg v_2 sebességgel mozog. Ezen a magasabb szinten az F_2 külső erő Δx_2 elmozdulással $-F_2 \Delta x_2$ negatív munkát végez. (Ez a munka azért negatív, mert az erő és az elmozdulás iránya ellentétes.) A bekövetkezett változások analizálását a munkatétel (6-22) egyenlettel megadott egyik változatának felírásával kezdjük:



17-14 ábra.

A vázlat azt az általános esetet mutatja be, amidőn a változó keresztmetszetű és szakaszonként különböző magasságú csőben örvénymentesen összenyomhatatlan, sűrűdésmentes folyadék áramlik. Bernoulli törvénye az energiamegmaradásnak a megfogalmazása erre az esetre.



$$\Delta W_F = \Delta K + \Delta U_g \quad (17-12)$$

ahol

$$\Delta W_F = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} (\Delta m_2) v_2^2 - \frac{1}{2} (\Delta m_1) v_1^2$$

és

$$\Delta U_g = (\Delta m_2) g y_2 - (\Delta m_1) g y_1$$

Mielőtt behelyettesítünk a (17-12) egyenletbe, figyelembe vesszük, hogy

$$\Delta m_1 = \rho A_1 \Delta x_1$$

$$F_1 = p_1 A_1$$

$$\Delta m_2 = \rho A_2 \Delta x_2$$

és

$$F_2 = p_2 A_2$$

Ézért a (17-12) egyenlet így alakul:

$$(A_1 \Delta x_1) p_1 - (A_2 \Delta x_2) p_2 = \frac{1}{2} (\rho A_2 \Delta x_2) v_2^2 - \frac{1}{2} (\rho A_1 \Delta x_1) v_1^2 + (\rho A_2 \Delta x_2) g y_2 - (\rho A_1 \Delta x_1) g y_1 \quad (17-13)$$

Mint hogy a folyadék összenyomhatatlan, a satírozott térfogatok egyenlők: $A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$, tehát a (17-13) egyenlet a

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

alakot ölti.

$$\text{Rendezve: } \underbrace{p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1}_{\textcircled{1}} = \underbrace{p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2}_{\textcircled{2}} \quad (17-14)$$

A $\rho g y$ tag lényegében valamely tetszőleges zérus vonatkoztatási szinttől mért y átlagmagassághoz tartozó gravitációs potenciális energia. Végezetül, minthogy az $\textcircled{1}$ és a $\textcircled{2}$ jelölés bármely két helyre vonatkozhat, ezért az indexelést elhagyjuk, és kimondjuk:

Összenyomhatatlan sűrűségmentes folyadék stacionárius áramlására

Bernoulli törvénye

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{állandó} \quad (17-15)$$

valamely áramfonal bármely pontjára érvényes.

Bernoulli törvénye könnyen megjegyezhető, ha az egyes tagjaiban felismerjük az *egységnyi térfogaton végzett munkát* (amit a környező folyadék végez), az *egységnyi térfogat kinetikus energiáját*, illetve az *egységnyi térfogat potenciális energiáját*. Ilyenformán a Bernoulli törvény az áramló folyadékokra fogalmazza meg az energiamegmaradás törvényét.

Hangsúlyoznunk kell, hogy a Bernoulli törvényt erősen idealizált esetre vezettük le. A gyakorlatban a folyadékok viszkozitása, a turbulencia és a gázok összenyomhatósága energiavesztéssel jár, ez bonyolítja a vizsgálatot. Így Bernoulli törvényének numerikus következtetései egy nagyon körülhatárolt értéktartományon kívül már nem érvényesek.

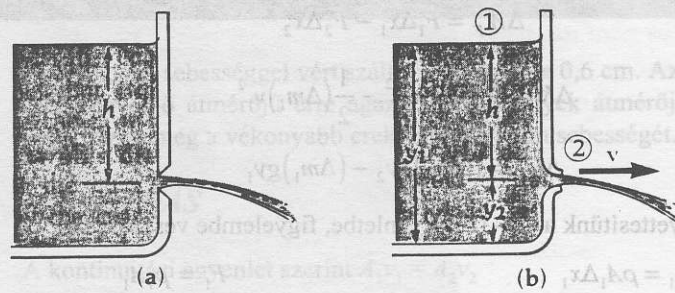
17-4 PÉLDA

A Bernoulli törvényt felhasználva határozzuk meg egy nagyméretű tartály vízszintje alatt h mélységben elhelyezett kisméretű, csőalakú, vízszintes nyíláson (fúvóka) kiömlő folyadék v kifolyási sebességét.

17-17 ábra.

A labda a levegőben balra mozog. A rúdjok a labda tömegközéppontjához rögzített vonatkoztatási rendszerben készültek; tehát a levegő balról jobbra áramlik a labda mellett.

17-15 ábra.
A 17-3 példához.



MEGOLDÁS

A körülményeket a 17-15b ábra mutatja be. A felszínen lévő ① és az alsó nyílás közvetlen közelében lévő ② jelű pontot vizsgáljuk. A két pontot áramvonalak kötik össze. Tekintve, hogy a tartály nagy, feltételezzük, hogy a víz kiömlése során az y_1 távolság számottevően nem változik, és ezért az ① helyen a sebesség gyakorlatilag zérus. A nyomás mindkét pontban az atmoszférikus nyomással egyenlő, ezért számításaink egyszerűsítésére *műszer-nyomást* használunk. Az $y = 0$ értéket a tartály aljához rendelve a következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned} \text{①} \qquad \qquad \qquad \text{②} \\ p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \\ 0 + 0 + \rho g y_1 &= 0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \end{aligned}$$

$$\text{Mint hogy } (y_1 - y_2) = h, \quad v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Az eredmény **Torricelli törvény** néven ismert. Kimondja, hogy nyitott tartályból a folyadék szintje alatti h mélységben a kiömlési sebesség egyenlő azzal a sebességgel, amelyre egy test h magasságból szabadon esve felgyorsulna.

Érdekes jelenség áll elő, ha a nyílás – mint a 17-15a ábrán – éles szélű és kör alakú. A folyadék a nyílás után egy rövid távolságon tovább gyorsul, ily módon a kilövellő sugár keresztmetszete szűkül (idézzük fel a kontinuitási egyenletet). A kilövellő sugár jellegzetes, *vena contracta* (szűkített ér) néven ismert alakot vesz fel. Emiatt a sugár úgy néz ki, mintha kisebb átmérőjű vízszintes fúvókából eredne (17-15b ábra). A Torricelli törvény a kontrakció beállása után érvényes.

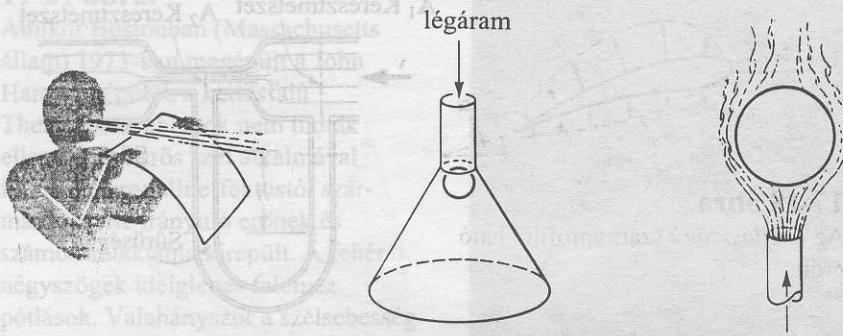
17.7 Példák a Bernoulli effektusra

Azt a tényt, hogy *a nyomás ott kisebb, ahol a sebesség nagyobb*, Bernoulli effektusnak nevezzük. Ez az effektus számos példán bemutatható, és ezek közt több mulatságos eset is előfordul (lásd a 17-16 ábrát).

A pörgő labda viszkózus anyagban (pl. levegőben) végbemenő mozgása számos különböző, de a Bernoulli effektussal kapcsolatos tényezőtől függ. A pörgetve eldobott labda a szokásos parabola-pályától eltérő, görbevonalú pályán mozog. A jelenséget célszerű olyan koordinátarendszerben vizsgálni,

17-14 ábra.

A vázlat azt az általános esetet mutatja be, amikor a változó keresztmetszű és szakaszoként különböző magasságú csőben árammentesen, viszkozitásmentesen, súrlódásmentesen folyadék áramlik. Bernoulli törvénye az energiamegmaradásnak a megfogalmazása erre az esetre.



A papírlap fölött fúj le-
vegő hatására a lap fel-
emelkedik.

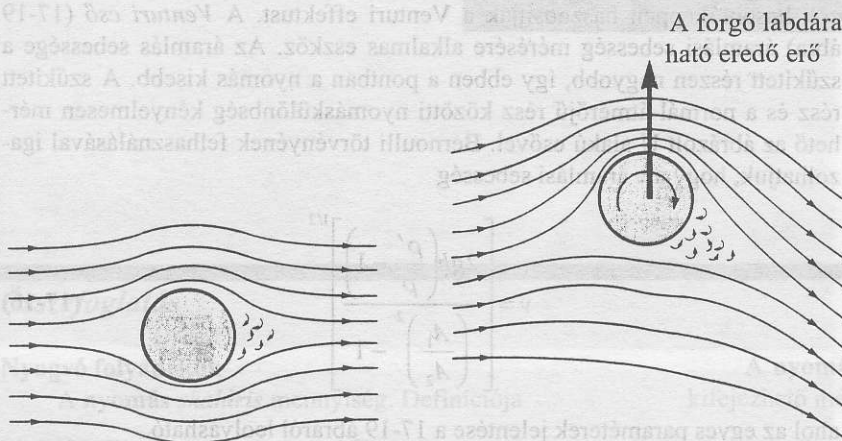
A ping-pong labda a le-
vegő hatására a fel-
fordított tölcsérben ma-
rad, ha levegőt fújunk a
tölcsér száján lefelé.

A függőleges légáram
lebegésben tartja a nagy
labdát, a légáram közep-
pén. Ha a labda az egyik
oldalra kitér, a Bernoulli
effektus visszahúzza.

17-16 ábra.
Példák a Bernoulli effektusra.

amelyben a labda tömegközéppontja nyugalomban van. (17-17 ábra.) Ha a labda felülete érdesített, akkor pörgés közben sokkal eredményesebben képes a levegőt egyik oldalán mintegy „magával vonszolni”. Hasonlóképpen a golflabda gödröcskái lehetővé teszik, hogy a labda felületéhez levegő-határreteg tapadjon, és így módon növekedjék az emelkedés magassága, ami a Bernoulli hatás és a légáramlás elterelése révén elérhető.

A repülőgépszárnyra ható aerodinamikai emelőerő is számos hatás következménye. A 17-18 ábrán bemutatott szárny kialakítása olyan, hogy a szárny felső felülete fölött a légáramlás sebessége nagyobb, mint az alsó felület alatt, ezáltal a szárnyra a Bernoulli hatás következtében felfelé irányuló erő hat. (Lásd a 17-12a ábrát is.) A jelenség vizsgálatát azonban bonyolultabbá teszi a levegő nagymértékű kompresszibilitása és a turbulencia. Tovább-

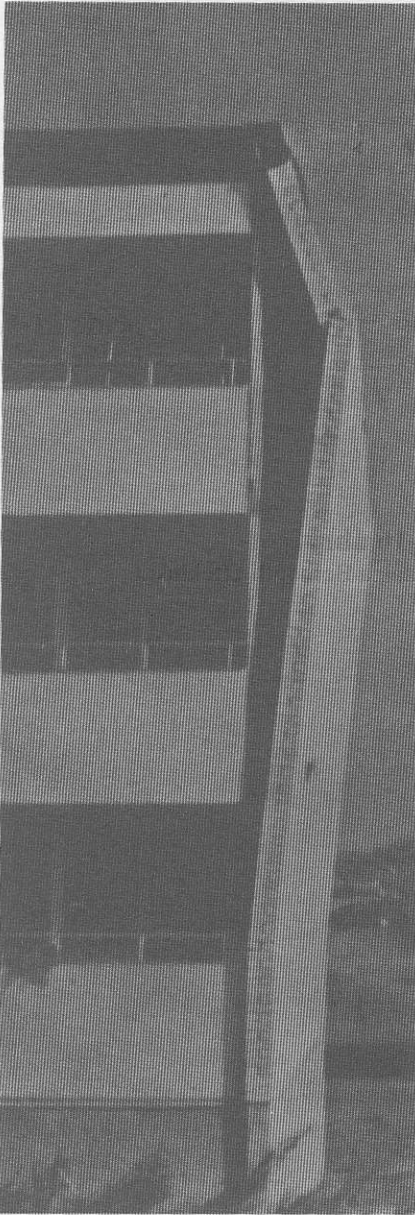


(a) Ha a labda nem pörög, a labda környezetében az áramvonalak szimmetrikusak. A nagy sebesség következtében a labda mögötti tartományban szimmetrikus turbulens örvények alakulnak ki.

(b) Ha a labda pörög, akkor a levegő viszkozitása miatt több levegőt ragad magával fölül, mint alul. Következésképpen a levegő sebessége a labda fölött nagyobb, emiatt ott csökken a nyomás. Továbbá a labda lefelé téríti a légáramot, így ez a légáram felfelé mutató reakcióerőt gyakorol a labdára.

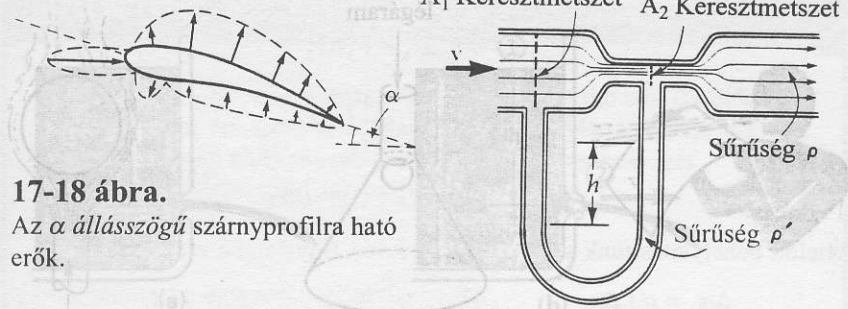
17-17 ábra.

A labda a levegőben balra mozog. A rajzok a labda tömegközéppontjához rögzített vonatkoztatási rendszerben készültek; tehát a levegő balról jobbra áramlik a labda mellett.



17-20 ábra.

Ez a külső téglafal a Bernoulli hatás következtében hajlott ki, amikor a falal párhuzamos szél hatására helyi nyomáskülönbség keletkezett.



17-18 ábra.

Az α állásszögű szárnyprofilra ható erők.

17-19 ábra.

A csövön átáramló folyadék sebességének mérésére szolgáló Venturi-cső. Az U alakú csőben higany (vagy más folyadék) van. A higanyszint-különbség a csőben áramló folyadék áramlási sebességének függvénye. Ahol a cső keskenyebb, ott az áramlási sebesség nagyobb, és ez okozza a lecsökkent nyomást.

bi hatásként jön szóba a szárnyprofil „állásszöge”: a szárnyprofil középvonala és a légáram iránya által bezárt α szög. Az állásszög következtében az alsó felület lefelé téríti a légáramot, ezáltal a szárnya további felfelé irányuló reakcióerő hat.

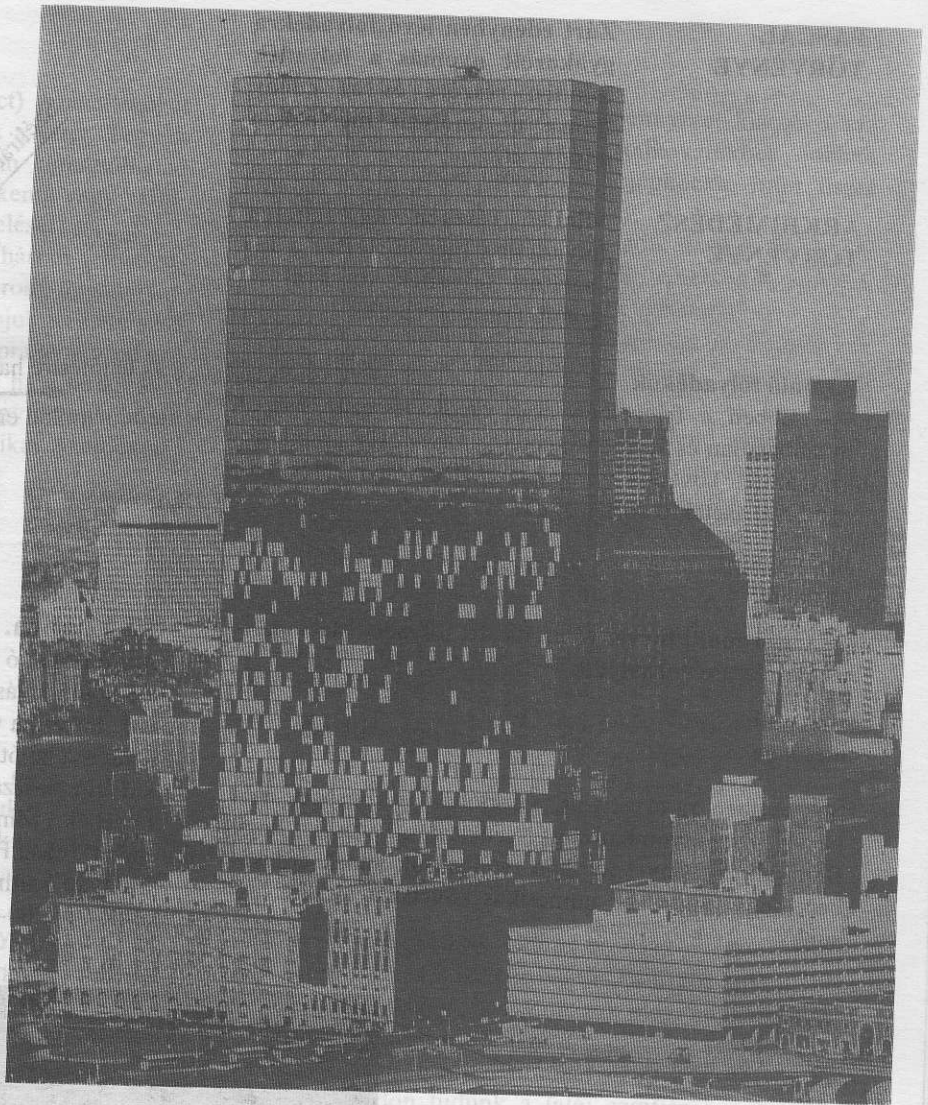
Annak a jelenségnek, hogy a csővezeték szűkülő keresztmetszetén csökken a nyomás, **Venturi effektus** a neve. (A turbulencia elkerülésére a csőnek meghatározott módon kell elvékonyodnia.) Az effektust felhasználják benzingőzőknek a gépkocsimotor szívócsövébe juttatására. A porlasztó a rá csatlakozó Venturi torokban kisnyomású tartományt állít elő, amely egy kicsiny fűvókán át benzint szív a torok légáramába. A porlasztók és permetezők hasonlóképpen hasznosítják a Venturi effektust. A *Venturi cső* (17-19 ábra) áramlási sebesség mérésére alkalmas eszköz. Az áramlás sebessége a szűkített részen nagyobb, így ebben a pontban a nyomás kisebb. A szűkített rész és a normál-átmérőjű rész közötti nyomáskülönbség kényelmesen mérhető az ábrázolt U alakú csővel. Bernoulli törvényének felhasználásával igazolhatjuk, hogy a v áramlási sebesség

$$v = \frac{2gh \left(\frac{\rho'}{\rho} - 1 \right)^{1/2}}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1} \quad (17-16)$$

ahol az egyes paraméterek jelentése a 17-19 ábráról leolvasható.

17-21 ábra.

Amikor Bostonban (Massachusetts állam) 1973-ban megépült a John Hancock épület, a kettősfalú Thermopane ablakok nem tudtak ellenállni az erős szél alkalmával fellépő, Bernoulli effektustól származó, kifelé irányuló erőnek és számos ablaktábla kirepült. A fehér négyszögek ideiglenes falemez pótlások. Valahányszor a szélesség meghaladta az óránkénti 45 mérföldet (kb. 80 km/óra), a környék utcáit le kellett zárni, hogy a járókelőket a lehulló üvegcserépektől megvédjék, és az épület beköltözését több mint egy évvel el kellett halasztani. Végül is mind a 10348 ablakot, biztonságosan rögzített keretbe foglalt 13 mm vastag hőkezelt üvegből készült, egyedileg legyártott ablaktáblákkal pótolták.

**Összefoglalás****Nyugvó folyadékok**

A nyomás skaláris mennyiség. Definíciója

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Nyugvó folyadékok bármely velük érintkező felületre merőleges irányú erőt fejtenek ki.

A folyadékfelszín alatt h mélységben a p nyomás

$$p = p_0 + \rho gh$$

ahol p_0 a nyomás a folyadék felszínén, ρ a folyadék sűrűsége (tömeg/térfogat) és h a folyadékfelszíntől mért (pozitív számmal kifejezett) távolság.

A nyomás egysége az atmoszféra (1 atm), amely kifejezhető még az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} 1 \text{ atm} &= 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 1,013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\ &= 1013 \text{ millibar} \\ &= 76,0 \text{ Hg cm.} \end{aligned}$$

Néhány esetben célszerű **műszer-nyomással** számolni, vagyis olyan nyomáskálával, amelynek zéruspontja az 1 atm nyomásnál van kialakítva.

Az alábbi két törvény a nyugvó folyadékokra vonatkozik:

PASCAL TÖRVÉNYE

Zárt edényben lévő folyadékra gyakorolt nyomás a folyadék minden részére és az edény falára ugyanolyan mértékben adódik át.

ARKHIMÉDÉSZ TÖRVÉNYE

Minden, részben vagy teljesen folyadékba merülő testre a kiszorított folyadék súlyával egyenlő felhajtóerő hat.

Áramló folyadékok

Ebben a fejezetben csak *ideális* – azaz összenyomhatatlan és súrlódásmentes – *folyadékok* áramlását vizsgáljuk. Továbbá vizsgálatainkat örvénymentes stacionárius esetekre korlátozzuk.

Kontinuitási egyenlet

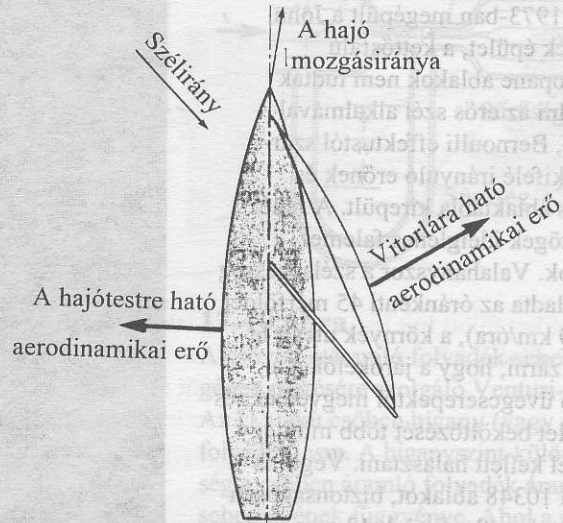
$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Bernoulli törvénye az ideális folyadék stacionárius áramlására vonatkozik

Bernoulli törvénye

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{állandó.}$$

Sok esetben az örvénylés, a súrlódási veszteségek és a gázok összenyomhatósága szükségessé teszi, hogy Bernoulli törvényét jócskán módosítsuk annak érdekében, hogy pontosabb numerikus következtetésekre jussunk.



17-22 ábra.

A vitorláshajó részben szél ellen is tud vitorlázni. A Bernoulli hatás következtében a hajót a vitorlára ható erő „húzza” a vízen. Ugyanilyen Bernoulli hatást fejt ki a víz is a hajótörzsre, ami az ábrán látható aerodinamikai erőt okozza. (Az ábrából bizonyos fékezőerők hiányoznak.) Mindezen erők eredője ellenszél irányába mutat. (Lásd H. C. Herreshoff és J. N. Newman, „The Study of Sailing Yachts”, *Scientific American* (Aug. 1966), pp. 60-68.)

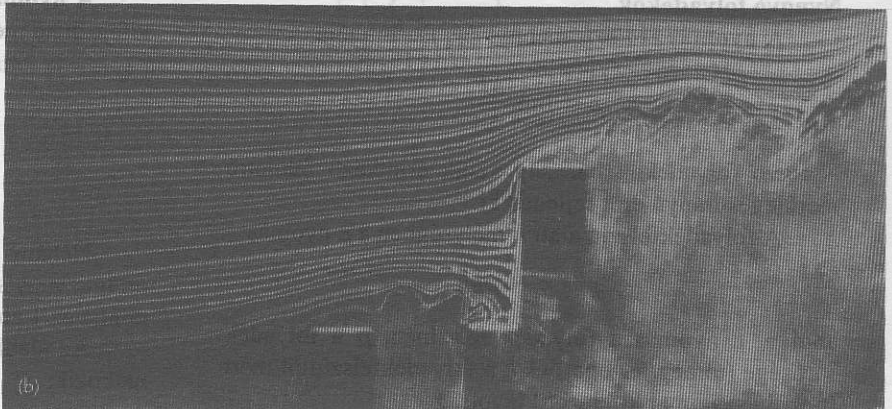
17-20 ábra.

Ez a külső téglafal a Bernoulli hatás következtében hajlott ki, amikor a fal-nyomáskülönbség keletkezett.



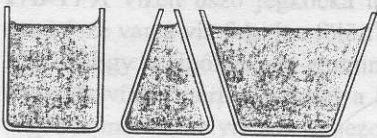
17-23 ábra.

Szélcsatorna kísérletben a két épületmodell körül kialakuló áramvonalakat a csatorna elején beengedett füstszugarak teszik láthatóvá. Az áramlás nagyon turbulens. Az (a) képen az épületek között a lefelé térített áramvonalak jól kialakult örvényt hoznak létre, aminek következtében a járdaszinten zavaróan nagy szél keletkezik. A (b) képen a nagyobb épület tervének módosítása kiküszöböli az örvénylést.



Kérdések

1. A római vízvezetékek (aqueduct) szakadékokat áthidalva csatornában szállították a vizet. Tegyük fel, hogy egy csatornahídon lassan keresztülhalad egy megterhelt ladik. Növeli, csökkenti, vagy változatlanul hagyja-e a ladik a híd terhelését?
2. Tekintsük a 17-24 ábrán látható három (elhanyagolható tömegű) tartályt! Mindhárom ugyanolyan magasan van vízzel töltve. Alaplapjuk területe azonos, ezért a folyadék által az alaplapra gyakorolt erő mindhárom tartályban egyenlő. De ha a tartályokat mérlegre tesszük, súlyuk nem egyforma. Adjuk magyarázatát ennek a „hidrosztatikai paradoxon” néven ismert jelenségnek!

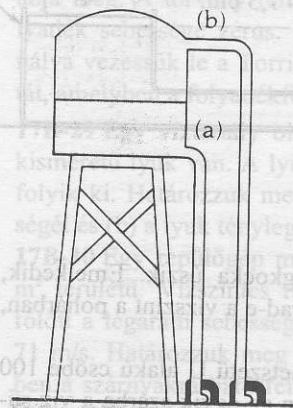


17-24 ábra.

A 2. kérdéshez.

3. Higanytartály felszínén úszik egy tárgy. Most a tartályt egy üvegharanggal leborítjuk és kiszivattyúzzuk alóla a levegőt. Mi történik: a tárgy kissé lejjebb süllyed, feljebb emelkedik, vagy bemezősége változatlan marad?
4. Két különböző sűrűségű tárgyat egyenlőkarú mérleg serpenyőibe teszünk. A mérleg azt mutatja, hogy tömegük egyenlő. A mérleget most légmentesen záró kamrába tesszük, ahonnan a levegőt kiszivattyúzzuk. A mérleg most azt mutatja, hogy a két tárgy tömege nem egyenlő. Melyik tárgy tömege nagyobb?
5. Töltsünk meg egy poharat színültig vízzel. Helyezzünk a pohárra egy kartonpapír darabot, és kezünket rajta tartva fordítsuk meg a poharat. Vegyük el kezünket a papírról! A víz nem folyik ki. Magyarázzuk meg a jelenséget!
6. Magyarázzuk meg, hogy a Föld légkörében fel szálló héliummal töltött léggömb emelkedési magasságának miért van maximuma! Mely esetben lenne a magasság maximuma nagyobb: ha a ballon térfogata állandó maradna, vagy ha a ballon térfogata a magassággal növekedne (a bezárt gázmenyiség megtartása mellett).
7. A horgászok néha olyan zsinórt használnak, amelyik nem bírja el a horogra akadt hal súlyát. Az ügyes horgász mégis ki tudja fogni a halat anélkül, hogy a zsinór elszakadna. Adjunk rá magyarázatot!
8. Jégkocka úszik egy pohár vízben, majd elolvad. Mi történik a vízszinttel: emelkedik, süllyed, vagy ugyanaz marad? Mi történne, ha a jégkockában kis légbuborék lenne? Ha a jégkockában kis kavics lenne? Mi történne, ha a víz és a pohár kezdetben szobahőmérsékleten (nem pedig 0°C -on) lenne?

9. Az alkohol sűrűsége valamennyivel kisebb a víz sűrűségénél. Vajon egy italkeverékben jobban vagy kevésbé merül be a jégkocka, mint tiszta vízben?
10. Egy ócskavással megrakott ladik úszik a tavon. Ha az ócskavasat a vízbe szórják, emelkedik, süllyed, vagy változatlan marad-e a tó vízszintje?
11. Két papírlap egymástól néhány cm távolságra van felfüggesztve. Ha közéjük fújunk, egymás felé mozdulnak. Miért?
12. Két egymással párhuzamosan haladó gépkocsi vezetői tapasztalják, hogy egymás felé húzó erő hat rájuk. A Bernoulli elv alkalmazásával adjuk meg a jelenség magyarázatát! (Hasonló hatás miatt, ha nem elég óvatosak, akkor két egymás mellett haladó nagy hajó is bajba kerülhet.)
13. Egy uszoda vízén egy csónak úszik. A csónak fenekéből kihúznak egy dugót. Fejtsük ki, milyen változás következik be az uszoda vízszintjében, amikor (a) a víz kezd a csónakba ömleni (b) és amikor a csónak már lesüllyedt az uszoda fenekére.
14. Néha a nagy jéghegyek a közelben tartózkodó hajókat veszélyeztetve feldőlnek. Minthogy a jéghegy 89%-a van a víz alatt, hogyan lehetséges, hogy ekkora vízalatti jégtömegeg az megtörténhet?
15. A Föld egyenlítői kidomborodása miatt a Mississippi forrása közelebb van a Föld középpontjához, mint a torkolata. Magyarázzuk meg, hogyan folyhat a folyó „hegynek felfelé”?
16. Egy magas toronyban elhelyezett víztartályba kétféle módon tudunk a talaj szintjéről csövön keresztül vizet szivattyúzni: (a) a tartály aljába kötött csövön át, vagy (b) a tartály tetején bekötött csövön keresztül a 17-25 ábra szerint. Melyik módszer igényel kisebb teljesítményt a szivattyú üzemeltetéséhez?



17-25 ábra.

A 16. kérdéshez.

Feladatok

17.2 A sűrűség

17.3 A nyomás

17B-1 1983-ban Az Egyesült Államok a tiszta rézből vert cent helyett rézbevonatú cink érmét kezdett kibocsátani. A régi réz cent tömege 3,083 g, az újé 2,517 g. Számítsuk ki, hány (térfogat)százalék cink van az új centben. A réz sűrűsége $8,960 \text{ g/cm}^3$, a cinké $7,133 \text{ g/cm}^3$. A régi és az új érme térfogata egyenlő.

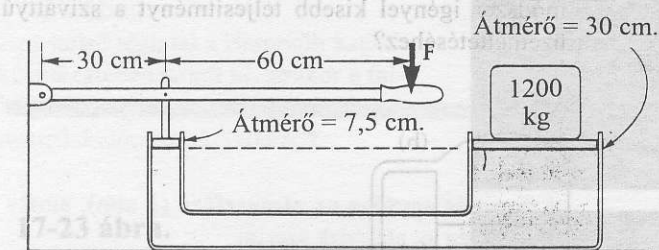
17B-2 Légmentesen zárt teremben a levegő nyomása 0,4%-kal kisebb a termen kívül lévő levegő átlagos atmoszférikus nyomásánál. A teremből egy légmentesen záró 2,20 m magas és 1,20 m széles ajtó nyílik kifelé. Határozzuk meg azt a legkisebb erőt, amellyel az ajtó oldalához elhelyezett fogantyúra kell hatni, hogy az ajtót ki lehessen nyitni! (Útmutatás: tegyük fel, hogy a légnyomástól származó eredő erő az ajtó középpontjában támad.)

17B-3 Mély víztartály alján szögletes doboz fekszik. Mutassuk meg, hogy a doboz egyik függőleges oldalára ható erők eredője az oldal területének és az oldal középpontjában lévő nyomásnak szorzatával egyenlő!

17B-4 Egy $1,8 \text{ m} \times 3,6 \text{ m}$ alapú tartály 2,4 m magasságban vizet tartalmaz. A légnyomás elhanyagolásával határozzuk meg (a) a fenékre ható erőt és (b) az $1,8 \text{ m} \times 2,4 \text{ m}$ méretű oldalfalra (kizárólag a víztől) ható erőt!

17.4 Pascal törvénye és az Arkhimédész törvény

17A-5 A 17-26 ábrán a hidraulikus emelő dugattyúi körlap alapúak, és azonos magasságban helyezkednek el. Határozzuk meg azt az F erőt, amely az ábrázolt módon tartani tudja az 1200 kg-os terhet!



17-26 ábra.

A 17A-5 feladathoz.

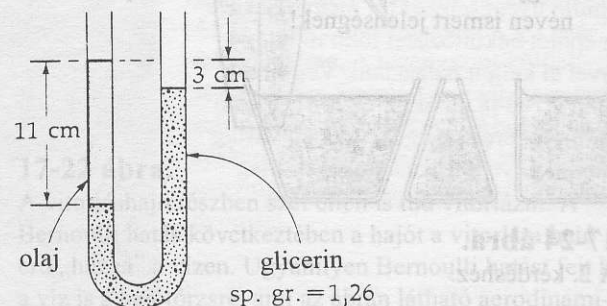
17A-6 Egy pohár vízben jégkocka úszik. Emelkedik, süllyed, vagy változatlan marad-e a vízszint a pohárban, amikor a jégkocka elolvad?

17A-7 Egy $1,0 \text{ cm}^2$ keresztmetszetű U alakú csőbe 100 milliliter vizet öntünk. Ezután az egyik szárba a víz sűrűségének 80%-val egyenlő sűrűségű 100 milliliter olajat öntünk úgy, hogy az olaj a vízben ússzon. Határozzuk

meg az U cső két szárában a folyadékok szintkülönbségét.

17A-8 Határozzuk meg az olaj relatív sűrűségét a 17-27 ábra adataival!

17B-9 Egy tárgy súlya a levegőben 15 N. Vízbe merítve ugyanez a tárgy 12 N súlyú. Ha másik folyadékba mérítjük, 13 N a súlya. Határozzuk meg (a) a tárgy sűrűségét és (b) a másik folyadék sűrűségét.

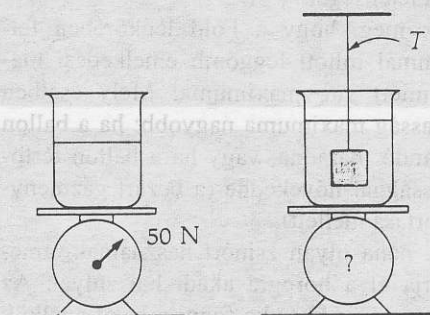


17-27 ábra.

A 17A-8 feladathoz.

17A-10 Egy halász a tó közepére evez, és horgonyt vet. A horgony a tó fenekére süllyed. Ennek következtében vajon emelkedik, változatlan marad, vagy süllyed a tó szintje? A választ indokoljuk meg.

17B-11 Egy részben vízzel töltött tartályt mérlegre helyezünk, és súlyát 50N-nak találjuk. Ezután egy 10 cm élhosszúságú gránitkockát lógatunk a vízbe a teljes beemerülésig úgy, hogy ne érjen hozzá sem az edény falához, sem az aljához. (17-28 ábra.) A beemerülő kockát tartó fonalat feszítő T erő 16,7 N. (a) Határozzuk meg a gránit sűrűségét. (b) Határozzuk meg, mekkora súlyt jelez a mérleg az adott feltételek mellett.



17-28 ábra.

A 17B-11 feladathoz.

17B-12 Hivatkozunk a 17-2 példára. Vezessünk le a folyadék sűrűségére olyan kifejezést, amelyben a levegő felhajtóereje is szerepel.

17B-13 Ahhoz, hogy egy fahasábot teljesen víz alatt tartsunk, a hasáb levegőben mért súlyának egy nyolcad részével egyenlő erő szükséges. Határozzuk meg a fahasáb fajsúlyát!

17B-14 Egy ping-pong labda átlagos sűrűsége $0,084 \text{ g/cm}^3$, és átmérője $3,8 \text{ cm}$. Mekkora erővel lehet teljesen víz alatt tartani?

17B-15 Egy $0,20$ fajsúlyú, m tömegű parafadugót egy víztartály aljához erősített cérnaszál tart teljesen a víz alatt. Határozzuk meg a cérnát feszítő T erőt a dugó mg súlyának függvényében!

17B-16 Egy l élhosszúságú kocka teljesen bemerül a ρ sűrűségű folyadékba. A kocka felső lapja vízszintes helyzetű, és D mélységben van a folyadék felszíne alatt.

(a) Számítsuk ki a kocka minden egyes lapjára ható erőt. (b) Határozzuk meg a kockára ható erők eredőjét!

17B-17 A vízben úszó jégkocka teljes térfogatának hányadrésze van a víz felszíne fölött?

17B-18 Egy acélból és egy alumíniumból készült tömör tárgynak vízbe merítve azonos a látszólagos súlya. Levegőben mérve melyikük a nehezebb (ha egyáltalán van súlykülönbség közöttük)?

17.5 Folyadékok áramlása

17A-19 Egy 4 cm belső átmérőjű vízszintes csőben víz áramlik. A cső $1,5 \text{ cm}$ belső átmérőre szűkül össze, ahol a víz átlagos sebessége 10 m/s . Határozzuk meg a cső vastagabb részén belépő vízáram időegységankénti térfogatát.

17A-20 Egy r sugarú ér v_0 átlagos sebességgel vért szállít. Három érre osztódik, mindegyik sugara $r/3$. Határozzuk meg mindegyik vékonyabb érben az átlagos sebességet!

17A-21 4 cm belső átmérőjű csőben 10 cm/s sebességgel víz áramlik. A cső egy 2 cm belső átmérőjű csőhöz csatlakozik. Mekkora az áramlás sebessége a vékonyabb csőben?

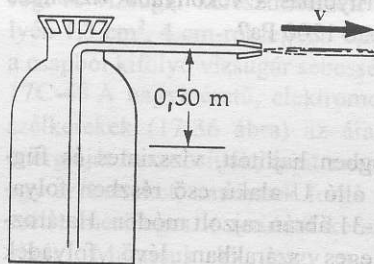
17A-22 Egy $7,5 \text{ cm}$ átmérőjű tűzoltó tömlőben a vízáram sebessége $2,4 \text{ m/s}$. (a) Hány liter vizet lövell ki a csővég másodpercenként? (b) A csővég átmérője $3,5 \text{ cm}$ -re csökken, milyen nagy a kilövellő víz sebessége?

17.6 A Bernoulli törvény

17B-23 Egy 900 kg/m^3 sűrűségű olajat szállító csővezetékben a műszernyomás $4 \times 10^{-4} \text{ N/m}^2$, és az áramlás sebessége $1,2 \text{ m/s}$. A cső keresztmetszete 8 cm^2 . A cső egy másik része 20 cm -rel mélyebben fekszik, és keresztmetszete 6 cm^2 . A súrlódási jelenséget elhanyagolva határozzuk meg ez utóbbi helyen a műszernyomást.

17A-24 Vízszintes, 10 cm belső átmérőjű cső fokozatosan 5 cm belső átmérőre szűkül. A víz nyomása a vastagabb csőben $8 \times 10^4 \text{ N/m}^2$, a vékonyabb csőben $6 \times 10^4 \text{ N/m}^2$. Milyen sebesen áramlik a víz a csövekben?

17B-25 Egy tűzoltó készülékből levegő nyomásával nyomják ki a vizet (17-29 ábra). Hány atmoszféra műszernyomás szükséges 30 m/s sebességű vízszögár kilövelléséhez, ha a vízszint $0,50 \text{ m}$ -rel van a fúvóka alatt?

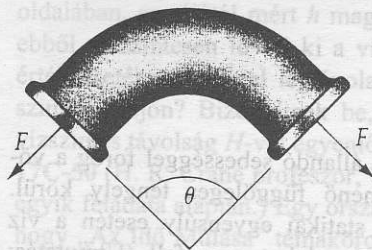


17-29 ábra.

A 17B-25 feladathoz.

17B-26 Mekkora teljesítménnyel lehet másodpercenként 50 liter vizet 1 atm nyomáskülönbséggel egy vízszintes csővön átszivattyúzni?

17B-27 Egy A keresztmetszetű cső vízszintes síkban görbül a 17-30 ábra szerint. (Az ábrán nem bemutatott) szomszédos csatlakozó csövek a peremekre egyenlő nagyságú vízszintes F erőt gyakorolnak. A folyadék sebessége v , sűrűsége ρ . Határozzuk meg az F erőt, és mutassuk meg, hogy független a θ szögtől!



17-30 ábra.

A 17B-27 feladathoz.

17B-28 A Torricelli törvény a $v = \sqrt{2gh}$ összefüggés alapján a tartályban lévő folyadék felszíne alatti h mélységben található lyukon kiömlő folyadék v sebességét adja meg. A törvény feltételezi, hogy a felszínen a folyadék sebessége zérus. A Bernoulli törvényt felhasználva vezessük le a Torricelli törvénynek azt a változatát, amelyben a folyadékfelszín v_0 sebessége is szerepel.

17B-29 Egy víztartály oldalán a vízszint alatt 3 m -rel kisméretű lyuk van. A lyukon egy óra alatt $0,17 \text{ m}^3$ víz folyik ki. Határozzuk meg (a) a kilépő vízszögár sebességét és (b) a lyuk tényleges átmérőjét!

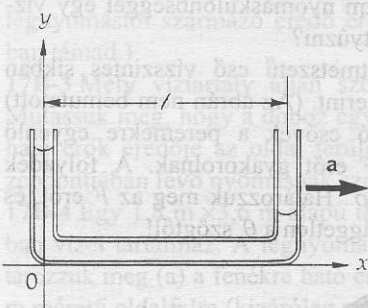
17B-30 Egy repülőgép mindkét szárnyának felülete 27 m^2 területű. Vízszintes repülés közben a felső felület fölött a légáram sebessége 89 m/s , az alsó felület alatt 71 m/s . Határozzuk meg a Bernoulli hatás következtében a szárnyakra ható felhajtóerőt! A repülés magasságában a levegő sűrűsége $1,14 \text{ kg/m}^3$.

17B-31 Vezessük le a (17-16) egyenletet.

17B-32 Egy 4 cm belső átmérőjű vízszintes csövön 1 m/s sebességgel víz áramlik. Ezután a csőrendszer függőleges irányú lesz és 2 m-es szakasz után 8 cm átmérőjű vízszintes csőbe torkollik. (a) Határozzuk meg a víz áramlási sebességét a vastagabb vízszintes csőben! (b) Mekkora a műszernyomás a vékonyabb vízszintes csőben, ha a vastagabban 1200 Pa?

További feladatok

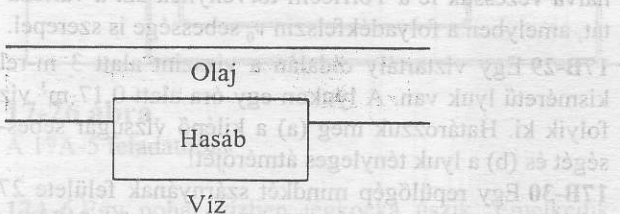
17C-33 Egy derékszögben hajlított, vízszintes és függőleges szakaszokból álló U alakú cső részben folyadékkal van töltve a 17-31 ábrán rajzolt módon. Határozzuk meg a függőleges szárukban lévő folyadék szintkülönbségét, ha a cső az x tengely pozitív irányában a gyorsulással mozog! (Útmutatás: vizsgáljuk a problémát gyorsuló vonatkoztatási rendszerből.)



17-31 ábra.

A 17C-33 feladathoz.

17C-34 Egy vödör víz állandó sebességgel forog a vödör középpontján átmenő függőleges tengely körül. Mutassuk meg, hogy statikai egyensúly esetén a víz felszíne forgási parabola alakot vesz fel! (Útmutatás: vizsgáljuk meg forgó vonatkoztatási rendszerben a folyadékfelszín kicsiny dm elemi tömegére ható erőket. A dm elemi tömeg gravitációs erőből és radiálisan kifelé mutató centrifugális erőből összeadó effektív súlyának a folyadék felszínére merőlegesnek kell lennie. Ennek alapján mutassuk meg, hogy a felszínen $dx/dy = kx$, ahol k egy állandó. Ez az $y = k^2 x^2$ eredményre vezet, ami parabola egyenlete.)



17-32 ábra.

A 17C-35 feladathoz.

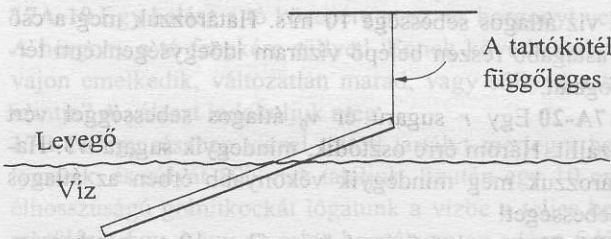
17C-35 Víz felszínén vastag olajréteg terül el. (A víz fajsúlya 1,00, az olajé 0,80.) A víz és az olaj közös ha-

tárfelületén homogén derékszögű hasáb úszik úgy, hogy térfogatának egy harmada az olajban van. (17-32 ábra.) Határozzuk meg a hasáb fajsúlyát!

17C-36 Egy négyzetes tartályban 2,5 m magasan víz van. A tartály egyik oldalának szélessége 8 m. (a) Határozzuk meg, mekkora erővel nyomja a víz az oldallapot! (A légnyomástól tekintünk el.) (b) Határozzuk meg a nyomóerő forgatónyomatékát a fenéken lévő oldaléllre vonatkozóan! (Javaslat: a 17-6b ábrán a dF erőtől származó dM forgatónyomaték $dM = r \times dF$, ahol r a fenéktől az elemi felületig terjedő távolság. A lapra ható forgatónyomatékot az elemi felületekre ható forgatónyomatékok integrálja adja.)

17C-37 Vékony homogén rudat egyik végén függőleges kötélt tart. A rúd másik vége szabadon úszik a vízben, ahogyan a 17-33 ábra mutatja. A rúd anyagának fajsúlya 0,50. (a) Vázoljuk fel a rúdra ható erők vektorábráját! (b) A rúd hányadrésze merül a víz alá?

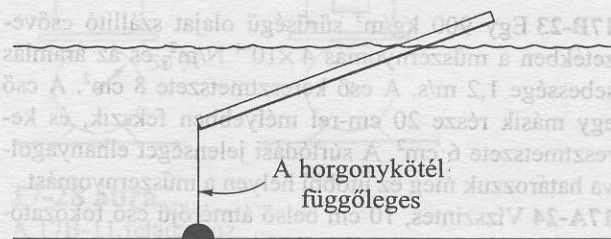
17C-38B Tegyük fel, hogy az előző feladatban a vízszint fokozatosan úgy változik, hogy a rúd és a vízszint által bezárt szög 10° és 80° között változik. (a) Megváltozik-e a kötelet feszítő erő, vagy állandó marad-e a rúd szögállásának változásakor? (b) Egyensúlyi feltételek mellett szükséges-e, hogy a kötélt függőleges legyen, vagy állhat más szögben is? Fejtsük ki véleményünket!



17-33 ábra.

A 17B-37 és a 17B-38 feladathoz.

17C-39 Vékony homogén póznából álló bóját édesvízben úgy horgonyoztak le, hogy egyensúlyi helyzetben szöget zárjon be a felszínnel, lásd a 17-34 ábrát. A pózna anyagának fajsúlya 0,50. A pózna hányadrésze nyúlik a víz felszíné fölé?



17-34 ábra.

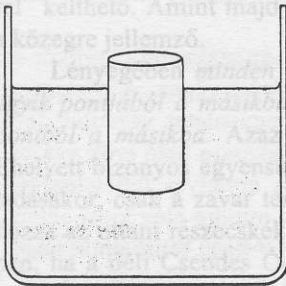
A 17C-39 feladathoz.

17C-40 Egy 40 cm hosszú, 20 cm széles és 5 cm vastag fahasáb fajsúlya 0,70. Mekkora térfogatú ólmot (fajsúlya 11,35) kell a hasáb alá erősíteni, hogy a vízbe süllyedve felső lapja éppen a víz felületén legyen?

17C-41 A levegő ρ sűrűsége arányos a p nyomással (azaz $\rho = kp$, ahol k állandó). Mutassuk meg, hogy a légkör nyomása a következőképpen változik a magassággal: $p = p_0 e^{-kgh}$, ahol h a p nyomású helyhez tartozó magasság. (Útmutatás: vegyük vizsgálat alá a dy vastagságú, dA területű vízszintes légrétegre ható erőket. Amint negatív y tengely irányába haladva a nyomás p -ről $p+dp$ -re változik, az y koordináta változása $-dy$.)

17C-42 Egy parafadugót cérnaszál tart egy vízzel telt serleg alján. A serleget egyenlőkarú mérleg egyik serpenyőjébe helyezzük, és a mérleg másik serpenyőjébe akkora tömegű testet helyezünk, amely a mérleget kiegyensúlyozza. A cérnaszál elszakad és a dugó felszáll. Kérdés, hogy amíg a dugó felfelé száll (de még nem jut a felszínre), emelkedik vagy süllyed a serleget tartó serpenyő, vagy nyugalomban marad? Magyarazzuk meg a jelenséget!

17C-43 Egy henger alakú kanna úgy van terhelve, hogy a 17-35 ábrán látható módon függőleges helyzetben ússzon. A henger keresztmetszetének területe A , tömege m . Határozzuk meg azt a T periódusidőt, amellyel a henger a ρ sűrűségű folyadékban kis amplitúdójú rezgéseket végez! (Útmutatás: nyomjuk le a hengert egy kicsiny y távolsággal. Mekkora lesz a hengerre ható visszatérítő erő?)



17-35 ábra.

A 17C-43 feladathoz.

17C-44 1 cm^2 keresztmetszetű U alakú csőbe száz köbcentiméter higanyt öntünk. A higany mindaddig ide-oda rezeg a cső alján, amíg a statikus egyensúly be nem áll. Határozzuk meg a rezgés periódusidejét.

17C-45 Mutassuk ki, hogy ha a levegő felhajtóerejét elhanyagoljuk, akkor valamely tárgy súlyának $\Delta W/W$ relatív mérési hibája a levegő és a tárgy sűrűségének (ebben a sorrendben képzett) hányadosával egyenlő.

17C-46 Egy tóból vizet szivattyúznak fel a 32 méterrel magasabban fekvő öntöző árokba. A cső szájából a levegőbe ömlik ki a víz. A cső belső átmérője 19 cm, és vízhozama $105 \text{ m}^3/\text{h}$. (a) Határozzuk meg a víz áramlási

sebességét a csőben. (b) Számítsuk ki azt a műszer-nyomást, amivel a szivattyú dolgozik. (c) Ha a szivattyú hatásfoka 80%, mennyi a felvett teljesítmény?

17C-47 A vízcsapból függőlegesen kifolyó vízszögár „beszűkül”, amikor a gravitáció hatására szabadon csurog. A vízszögár keresztmetszete a csapból kilépés helyén $1,3 \text{ cm}^2$, 4 cm-rel lejjebb $0,3 \text{ cm}^2$. Határozzuk meg a csapból kifolyó vízszögár sebességét!

17C-48 A nagyméretű, elektromos energiát szolgáltató szélkerekek (17-36 ábra) az áramló levegő kinetikus energiáját hasznosítják, mint energiaforrást. Tekintsünk egy szélkereket, amelynek forgó vitorlái a v sebességű szélre merőleges A területű keresztmetszetet söpörnek végig. Mutassuk ki, hogy a szélkeréken átáramló teljesítmény $= \frac{1}{2} \rho v^3 A$, ahol ρ a levegő sűrűsége. (b) Az eredeti v_0 szélesebesség hány százalékos növekedése kétszerezné meg az elért teljesítményt? (c) Minthogy a levegő bizonyos (nem zérus) sebességgel hagyja el a szélkereket, a rendelkezésre álló teljesítménynek csak töredéke hasznosítható. A szélkerék forgó alkatrészein fellépő súrlódási veszteség tovább rontja a hatásfokot. Tekintsünk egy 33 méter sugarú vitorlával felszerelt szélkereket, olyan helyre telepítve, ahol a szél átlagos sebessége 32 km/h . Számítsuk ki a leadott teljesítményt, ha a hatásfok 14%.

17C-49 Egy víztartályban H magasan áll a víz. A tartály oldalában, az aljától mért h magasságban kis lyuk van, ebből vízszintesen lövell ki a vízszögár. (a) Mekkora h érték esetében spriccel legtávolabbra a vízszögár a vízszintes talajon? Bizonyítsuk be, hogy ez a maximális vízszintes távolság H -val egyenlő!

17C-50 (H. R. Crane professzor, University of Michigan egyik feladata alapján.) Egy ország vezetője elhatározta, hogy „Az Idő Múlása” témakörrel világvásárt rendez. Azt akarta, hogy legyen egy központi kiállítás, ahol különböző típusú órák működő modelljeit mutatják be. Annak érdekében, hogy mindez lenyűgöző legyen, elrendelte: a modelleket létező órákról másolják le, de minden méret lineárisan négyszeresre legyen nagyítva. A megnyitás előtt két órával a modelleket a pontos időre (dél-élelőtti 10:00 órára) beállították. Azonban, amikor délben eljött az ünnepélyes megnyitás ideje, az ország vezetője zavarba jött attól, amit látott. Az órák az alábbi típusúak voltak:

- (1) egyszerű ingaóra
- (2) torziós ingaóra
- (3) zsebóra (balanszkerék típusú)
- (4) homokóra, normál méretű homokszemcsékkel, de minden más lineáris mérete felnagyítva, (amikor minden homok lepereg, megfordítják az eszközt és egy számláló jelzi hogy ismét eltelt egy óra)
- (5) napóra
- (6) vízóra: egy hengeres tartály fenekébe fűrt lyukon víz folyik ki, egy-egy óra elteltét vízszintes vonalak jelzik a hengerpaláston.

16C-51 $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = 84,5$ perc

16C-53 1,41 óra

16C-55 $\frac{GMm}{2R} \left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$

16C-57 $\frac{Gm}{R^2} \left(\frac{M}{4} - \frac{m}{3} \right)$

XVII. Fejezet

17B-1 90,0%

17B-3 A válasz adott.

17A-5 250 N

17A-7 20 cm

17B-9 a) 5000 kg/m³ b) 667 kg/m³

17B-11 a) 2704 kg/m³ b) 59,8 N

17B-13 0,89 kg/dm³

17B-15 4,00 mg

17B-17 $\Delta V/V = 0,0830$

17A-19 $1,77 \times 10^{-3}$ m³/s

17A-21 40 cm/s

17B-23 $3,7 \times 10^4$ N/m²

17B-25 4,49 atm

17B-27 ρAv^2

17B-29 a) 7,67 m/s b) 2,80 mm

17B-31 A válasz adott.

17C-33 al/g

17C-35 0,933

17C-37 $(1 - 1/\sqrt{2})$

17C-39 $(1 - 1/\sqrt{2})$

17C-41 A válasz adott.

17C-43 $T = 2\pi\sqrt{m/\rho Ag}$

17C-45 A válasz adott.

17C-47 27,3 cm³/s

17C-49 $H/2$

XVIII. Fejezet

18A-1 a) $2,27 \times 10^{-3}$ s b) 0,782 m

18A-3 A válasz adott.

18A-5 8,33 cm

18B-7 $A = 7 \times 10^{-4}$ m, $k = 3,14$ m⁻¹, $\omega = 6,28 \times 10^{-3}$ s⁻¹

18B-9 a) 1,27 Pa b) 170 Hz c) 2,00 m
d) 340 m/s

18B-11 18,56 m

18B-13 860 m

18A-15 $2,94 \times 10^{-16}$ J/cm³

18B-17 1,13 μ W

18B-19 A válasz adott.

18B-21 a) 565 Hz b) mélyülő hang

18A-23 2,07 N

18A-25 a) 515 Hz b) 4,13 cm

18A-27 a) 0,773 m b) 1,55 m c) 330 Hz d) 220 Hz

18A-29 870 Hz, 2610 Hz

18B-31 a) 34,8 m/s b) 0,977 m

18B-33 800 Hz

18A-35 19,9 m/s

18B-37 a) 1091 Hz b) 1100 Hz c) 1000 Hz

18A-39 28,4°

18B-41 5,64 Hz

18C-43 A válasz adott.

18C-45 3,14 m/s, $9,87 \times 10^3$ m/s²

18C-47 $K = 2,47 \times 10^{11}$ N/m²

$G = 1,25 \times 10^{11}$ N/m²

18C-49 b) $v = R\omega$

18C-51 a) +6,99 dB b) 2,24

18C-53 $\mu = 4,00 \times 10^{-3}$ kg/m, 2,50 cm hosszú

18C-55 12,6 m/s²

18C-57 60,0 Hz

18C-59 0,335 cm

XIX. Fejezet

19A-1 7,2 mm-t hozzá kell adni

19A-3 3×10^{-5} °C

19B-5 $2,17 \times 10^5$ N

19B-7 0,72 l

19A-9 6,44 kJ

19A-11 0,463 kJ/kg·°C

19A-13 0,431 joule/g·°C

19A-15 0,122 kg

19B-17 0,126 kJ/kg·°C

19B-19 87,5

19B-21 A válasz adott.

19A-23 557 J/s

19A-25 $1,38 \times 10^8$ J

19B-27 a) 290 g b) 42,9 g

19B-29 a) 8,44 kW b) 162 dollár

19A-31 5,00 W/m² °C

19B-33 2,84 J/s

19A-35 a) 61,1 kW·h b) \$3,67

19C-37 A válasz adott.

19C-39 a) 13,9 cm b) $2,6 \times 10^{-5}$ (C°)⁻¹

19C-41 8,0039 cm

19C-43 a) $\frac{T_2 k_1 \Delta x_2 + T_1 k_2 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2}$

19C-45 A válasz adott.

19C-47 $3,52 \times 10^4$ s = 9,78 h

19C-49 A válasz adott.

19C-51 A válasz adott.

XX. Fejezet

20A-1 48,5 l

20A-3 a) 4,48 m³ b) 5,60 kg

20A-5 0,046 m³

20A-7 12,0 l

20A-9 $1,98 \times 10^5$ Pa