Rendszerelmélet

1. előadás

2017.09.04.

Nagy Lajos (HVT) - nagy@hvt.bme.hu

Seller Rudolf

Tárgy adminisztráció

Szalay Zoltán

szalay@hvt.bme.hu

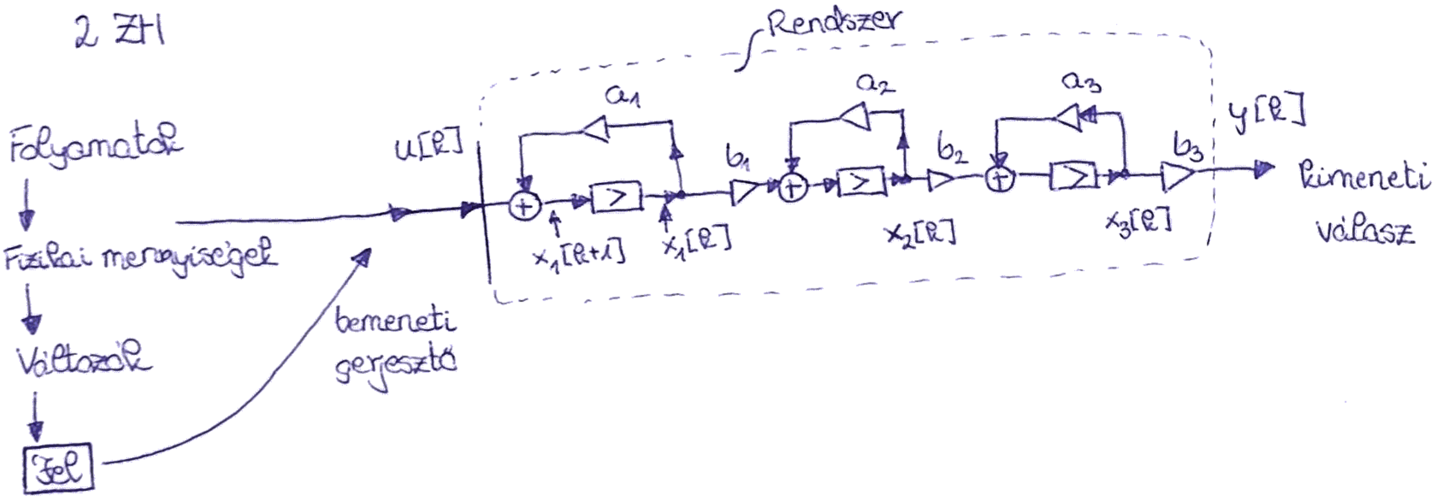
hvt.bme.hu

↳ Tanulmányi Portál

könyv: Fodor György - Jelek és rendszerek

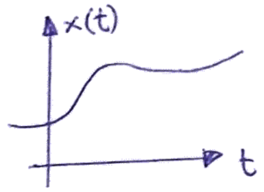
3 HF (2 legjobb házi pontszám számít, a 3.-nak csak fele pontszáma adható

2 ZH



Jelek osztályozása

1) FI (folytonos idejű)



$t \in \mathbb{R}$; $-\infty \leq t \leq \infty$

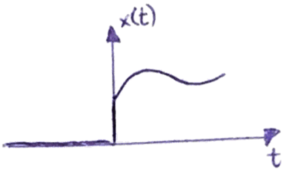
DI (diszkrét idejű)

$k \in \mathbb{Z}$ $-\infty \leq k \leq \infty$

2) Determinisztikus – sztochasztikus

3) Belépő jelek

(nullában)



$x(t)=0$, ha $t<0$,

$x[k]=0$, ha $k<0$

4) Páros – páratlan jel

páros (even) $x_e(t)=x_e(-t)$

$x_e[k]=x_e[-k]$

páratlan (odd) $x_o(t)=-x_o(-t)$

$x_o[k]=-x_o[-k]$

$$\boxed{x(t)=x_o(t)+x_e(t)}$$

$$\left.\begin{aligned} x(-t)&=x_o(-t)+x_e(-t) \\ x(t)&=x_o(t)+x_e(t) \end{aligned}\right\} \oplus \quad x_o(t)+x_o(-t)=0$$

$\emptyset \quad +2x_e(t)$

$$x_e(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)+x(-t)\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_o(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)-x(-t)\right)$$

Jelek leírása (megadása)

01 képlettel

$$x[k]=\begin{cases}\emptyset & \text{, ha } k<0 \\ 2\cdot 0{,}1^k, & \text{ha } k\geq 0\end{cases}$$

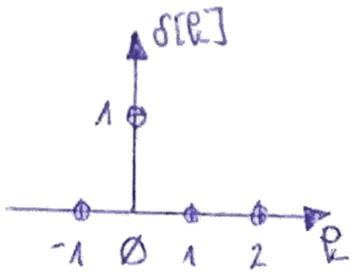
értékek felsorolása

$x[k]=\{x[0];x[1];\dots;x[L]\}=\{2;0{,}2;0{,}02;\dots;2\cdot 0{,}1^L\}$

$x[k]=0$, $k<0$

Speciális jelek (Egységimpulzus, egységugrás)

Egységimpulzus
$$\delta[k] = \begin{cases} \varnothing; & k<0 \\ 1; & k=0 \\ \varnothing; & k>0 \end{cases}$$

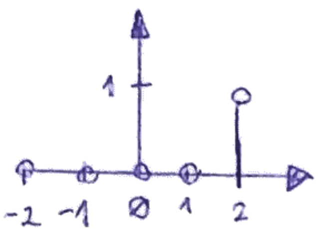


Egységugrás
$$\varepsilon[k] = \begin{cases} \varnothing; & k<0 \\ 1; & k\geq 0 \end{cases}$$

Műveletek:

- szorzás konstanssal
- összeadás - kivonás
- eltolás

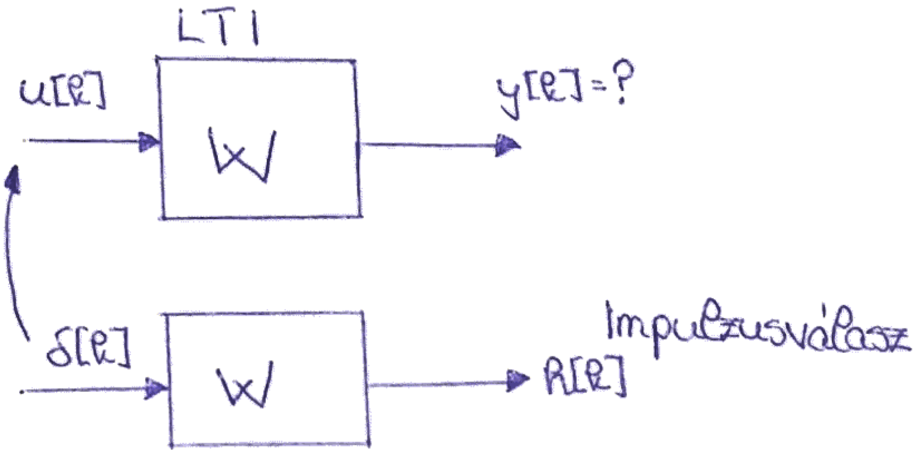
  $\delta[k-2]$



Minden diszkrét idejű jel megadható egységimpulzusok szuperpozíciójaként.
(előző példa)

$$x[k] = 2\cdot\delta[k] + 2\cdot 0{,}1\cdot\delta[k-1] + 2\cdot 0{,}1^2\cdot\delta[k-2] + \ldots + 2\cdot 0{,}1^L\cdot\delta[k-L] =$$
$$= 2\cdot\sum_{i=0}^{\infty} 0{,}1^i\cdot\delta[k-i]$$

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\cdot\delta[k-i]$$



Konvolúció
$$\boxed{y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\cdot h[k-i]}$$

$$y[k] = \underset{k}{W}\{x[k]\}$$

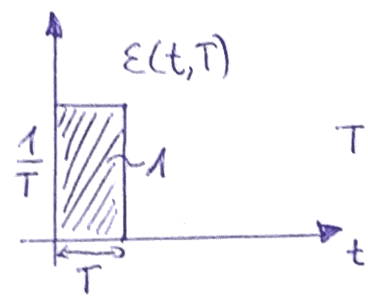
$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon[k] &= \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-i] \\ \delta[k] &= \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1] \end{aligned}}$$

$$\left(\delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t) \right)$$

FI jelek (spec.)

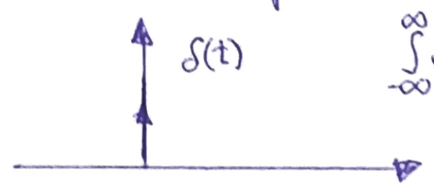
Egységugrás $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 \; ; & t < 0 \\ 1 \; ; & t > 0 \end{cases}$

Egységimpulzus (egység intenzitású)



$T \to 0$

Dirac impulzus

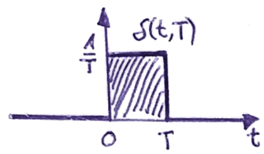


$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Rendszerelmélet
2. előadás

2017. 09. 11.

FI Egységimpulzus



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t,T)\,d\tau = 1$$

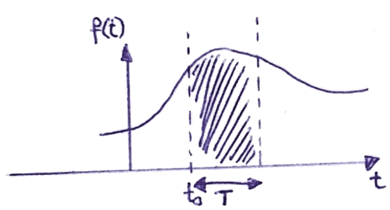
$T \to 0$

$$\delta(t,T) = \frac{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)}{T}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folytonos}}}{f(t)} \cdot \delta(t-t_0,T)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt \cong f(t_0+\eta T) = f(t_0)$$

T kicsi $\qquad 0 \le \eta \le 1$

$T \to 0$



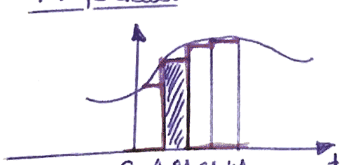
$$\lim_{T\to 0} \delta(t,T) = \delta(t)$$

Dirac-impulzus (delta)

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = f(t) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta(t) = \frac{d}{dt}\{\varepsilon(t)\} = \varepsilon'(t) \\ &\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases} \end{aligned}}$$

FI felírása



$$x(\Delta) \cdot \underbrace{\frac{[\varepsilon(t-\Delta)-\varepsilon(t-2\Delta)]}{\Delta}}_{\delta(t-\Delta,\Delta)} \cdot \Delta$$

$$x(t) \cong \underbrace{[x(0)\cdot\delta(t,\Delta) + x(\Delta)\cdot\delta(t-\Delta,\Delta) + x(2\Delta)\,\delta(t-2\Delta,\Delta)\ldots]}_{\cdot\Delta =}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x(k\Delta)\cdot\delta(t-k\Delta,\Delta)]\cdot\Delta \underset{\Delta\to 0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$

Rendszerek jellemzése

operátor

$$\underbrace{W}_{\text{operátor}}\{\underbrace{u(t)}_{\text{gerjesztés}}\} = \underbrace{y(t)}_{\text{válasz}}$$

SISO - Single Input Single Output

Ha az operátor időfüggő: idővariáns a rendszer.

Időinvariáns rendszerek (idővariáns)

- **Determinisztikus** (sztochasztikus)
- **Folytonos idejű** vagy **Diszkrét idejű** (D/A A/D) kevert
  $u(t), y(t)$ — $u[k], y[k]$
- **Lineáris rendszerek**
  Lamikre érvényes a szuperpozíció elve

$$W\{c_a \cdot u_a(t) + c_b \cdot u_b(t)\} = c_a \cdot \underbrace{W\{u_a(t)\}}_{y_a(t)} + c_b \cdot \underbrace{W\{u_b(t)\}}_{y_b(t)} = c_a \cdot y_a(t) + c_b \cdot y_b(t)$$

c_a, c_b: konstans

Pl. $y(t) = A \cdot t \cdot u(t)$ → Lin? - Igen. → Időinv? - Nem.

Időinvariáns

$$y(t) = W\{u(t)\} \Rightarrow W\{u(t-T)\} = y(t-T)$$

- **Memóriamentes** - memóriás (dinamikus) rendszerek
  ↓
  válasza a t illetve k pillanatban csak a gerjesztés t illetve k-beli értékétől függ
  $$y(t) = A \cdot t \cdot u(t)$$

- ~~Kazuális~~ **Kauzális** - akauzális rendszerek
  ↓
  $y(t_1)$ ill. $y[k_1]$ értékek a gerjesztés $u(t)$ ill. $u[k]$-tól függ
  $t \le t_1$ — $k \le k_1$

(Linear Timeinvariant)

Fő kérdés: Hogyan tudjuk megadni egy tetszőleges LTI válaszát?

Definiáljuk a rendszer speciális válaszait:

- Impulzusválasz – egységimpulzus (Dirac-impulzus)-ra adott válasz
- Ugrásválasz – egységugrásra adott válasz

LTI rendszer válasza (DI)

gerjesztés: $u[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] \cdot \delta[k-i]$

válasz: $y[k] = \underset{(k)}{W}\{u[k]\} = \underset{(k)}{W}\{\overset{konst.}{\sum_{i=-\infty}^{\infty}} u[i]\delta[k-i]\} \overset{LIN.}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] \cdot \underset{(k)}{W}\{\delta[k-i]\} = ⊛$

$W\{\delta[k]\} = h[k]$

ha TI

$\rightarrow W\{\delta[k-i]\} = h[k-i]$

$⊛ = \boxed{\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[k-i] = y[k]}$ konvolúció

Speciális esetek

- ha a rendszer kauzális, gerjesztés tetszőleges

↓

belépő impulzusválasz

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] \cdot h[\underbrace{k-i}_{p}] = \sum_{\substack{\cancel{p=+\infty} \\ p=-\infty}}^{\substack{+\infty \\ \cancel{-\infty}}} u[k-p]h[p] = h[k] * u[k] = u[k] * h[k]$$

$k-i = p$

$i = k-p$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\cancel{\infty}\ k} u[i]h[k-i] = \sum_{p=\cancel{-\infty}\ 0}^{\infty} u[k-p] \cdot h[p]$$

$k-i<0$ nem szummázunk $k<i$

$p<0$ nem Σ

• ha a rendszer kauzális, gerjesztés belépő

$$y[k] = \sum_{i=\cancel{-\infty}\,0}^{k} u[i]h[k-i] = \sum_{p=0}^{\cancel{\infty}\,k} u[k-p]h[p]$$

$k-p<0$

nem Σ

FI rendszer

gerjesztés $\quad u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

válasz $\quad y(t) = W\{u(t)\} \overset{LIN}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot W\{\delta(t-\tau)\}d\tau \overset{TI}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = u(t) * h(t) = h(t) * u(t)$$

Kauzális rendszer

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-0}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Kauzális + belépő

$$y(t) = \int_{-0}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-0}^{t} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$\delta(t)$

Rendszerelmélet

3. előadás

Példa.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \emptyset & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^{1000} = ? = \underline{\underline{A}}^{k}$$

Cayley-Hamilton:

$$\lambda^N + d_1\lambda^{N-1} + \ldots + d_N = 0 \quad \text{karakterisztikus egyenlet}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{A}}^N + d_1\underline{\underline{A}}^{N-1} + \ldots + d_N\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$$

Bizonyítás:

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{p} = \lambda\cdot\underline{p} \rightarrow \underline{\underline{A}}\cdot\underline{p}_1 = \underline{p}_i\cdot\begin{bmatrix} \lambda_{1_i} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\overset{\underline{\underline{P}}}{\begin{bmatrix} \underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \ldots & \underline{p}_N \end{bmatrix}} =$$

$$= \left(\cancel{\begin{bmatrix} \underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \ldots & \underline{p}_N \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ \emptyset & & \ddots\ \lambda_N \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1\underline{p}_1 & \lambda_2\underline{p}_2 & \ldots & \lambda_N\underline{p}_N \end{bmatrix} =$$

$$= \overset{\underline{\underline{P}}}{\begin{bmatrix} \underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \ldots & \underline{p}_N \end{bmatrix}}\overset{\underline{\underline{\Lambda}}}{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ \emptyset & & \ddots\ \lambda_N \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}\cdot\underline{\underline{\Lambda}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\cdot\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\underline{\underline{P}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{A}}^N + d_1\underline{\underline{A}}^{N-1} + \ldots + d_N\underline{\underline{E}} = (\underline{\underline{P}}\cdot\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\underline{\underline{P}}^{-1})^N + d_1(\underline{\underline{P}}\cdot\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\underline{\underline{P}}^{-1})^{N-1} + \ldots + d_N\cdot\underline{\underline{E}} =$$

$$= \underline{\underline{P}}(\underbrace{\underline{\underline{\Lambda}}^N}_{\begin{bmatrix} \lambda_1^N & & \emptyset \\ & \lambda_2^N & \\ \emptyset & & \ddots\ \lambda_N^N \end{bmatrix}} + d_1\underline{\underline{\Lambda}}^{N-1} + \ldots + d_N\underline{\underline{E}})\underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}\cdot\begin{bmatrix} \overset{=0}{\lambda_1^N + d_1\lambda_1^{N-1} + \ldots + d_N} & & \emptyset \\ \emptyset & \underset{=0}{\lambda_2^N + d_1\lambda_2^{N-1} + \ldots + d_N} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{0}}$$

Példa folytatása:

$$N=2$$

$$\underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{L}}_1\cdot\lambda_1^k + \underline{\underline{L}}_2\cdot\lambda_2^k$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \qquad \underline{\underline{L}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{L}}_2 = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^k = 1^k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2^k\begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ \emptyset & 2^k \end{bmatrix}$$

Második módszer: $\underline{\underline{A}}^{\ell} = (\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{A}}^2, \dots, \underline{\underline{A}}^{N-1})$

$(N=2)$

$$\underline{\underline{A}}^{\ell} = c_0 \underline{\underline{E}} + c_1 \underline{\underline{A}}$$

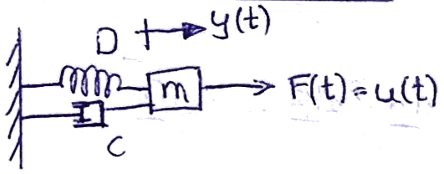
$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^{\ell} &= c_0 + c_1 \lambda_1 \\ \lambda_2^{\ell} &= c_0 + c_1 \lambda_2 \end{aligned}\right\} \ominus \rightarrow \lambda_2^{\ell} - \lambda_1^{\ell} = c_1 \overbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}^{1}$$

$$c_1 = 2^{\ell} - 1$$

$$c_0 = 1 - c_1 = 1 - 2^{\ell} + 1 = 2 - 2^{\ell}$$

$$\underline{\underline{A}}^{\ell} = (2 - 2^{\ell}) \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} + (2^{\ell} - 1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \emptyset & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{2 - 2^{\ell} + 2^{\ell} - 1}^{1} & 2^{\ell} - 1 \\ \emptyset & \underbrace{2 - 2^{\ell} + 2 \cdot 2^{\ell} - 2}_{2^{\ell}} \end{bmatrix}$$

FI állapotváltozós leírás



rugó: $D \cdot y = F_r$

dugattyú: $C \cdot v = F_d$ $\quad v = y'$

$$a \cdot m = F - Dy - Cy' = m \cdot y''$$

$$y'' + \frac{C}{m} y' + \frac{D}{m} \cdot y = \frac{F}{m} \quad \rightarrow \text{rendszeregyenlet}$$

Állapotváltozók: x elmozdulás
v sebesség

$$\left.\begin{aligned} v' &= \frac{F}{m} - \frac{D}{m} x - \frac{C}{m} \cdot v \\ x' &= v \end{aligned}\right\} \text{állapotegyenletek}$$

$$y = x$$

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ -\frac{D}{m} & -\frac{C}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad \emptyset] \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \emptyset \cdot u$$

$$\begin{cases} \underline{x}' = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u \\ y = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot u \end{cases}$$

Mechanikai rendszer $\sum F = 0 = F_{gerj} - Dx - Cx' - mx'' = F_{gerj} - D\int v\,dt - Cv - mv'$

$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}u$$

$$\underline{x}' - \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}u \qquad \Big/\, e^{-\underline{\underline{A}}t}\cdot$$

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \dots$$

$$e^{-at}(x' - ax) = (e^{-at}\cdot x)' = x' e^{-at} - ax\cdot e^{-at}$$

$$e^{-\underline{\underline{A}}t}\cdot(\underline{x}' - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}) = (e^{-\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{x})' = \underbrace{\underline{b}}_{\cdot e^{-\underline{\underline{A}}t}}\cdot u \qquad \Big/ \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\underbrace{e^{-\underline{\underline{A}}t}\underline{x}}_{\underline{x}(t)} - \underbrace{e^{-\underline{\underline{A}}t_0}\underline{x}}_{\underline{x}(t_0)} = \int_{t_0}^{t} \underline{b}\cdot u(\tau)\,d\tau \;\; \cdot e^{-\underline{\underline{A}}\tau} \longrightarrow e^{-\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{x}(t) = e^{-\underline{\underline{A}}t_0}\cdot\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\underline{\underline{A}}\tau}\cdot\underline{b}\cdot u\,d\tau \;\Big/\, e^{+\underline{\underline{A}}t}\cdot$$

$$\underline{x}(t) = e^{-\underline{\underline{A}}(t_0 - t)}\cdot\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{+\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\cdot\underline{b}\cdot u(\tau)\,d\tau = e^{\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{x}(-0) + \int_{-0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\underline{b}\,u(\tau)\,d\tau$$

$t_0 = -0 \qquad \underline{x}(-0)$

$$y = \underline{c}^T\cdot\underline{x}(t) + d\,u(t)$$

$$\boxed{e^{\underline{\underline{A}}t} = \sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{L}}_i\cdot e^{\lambda_i t}}$$

Impulzusválasz:

$$u(t) = \delta(t);\quad \underline{x}(-0) = \underline{0}$$

$$\underline{x}(t) = \int_{-0}^{t} e^{-\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\cdot\underline{b}\cdot\delta(t)\,d\tau = e^{-\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{b}\cdot\underbrace{\int_{-0}^{t}\delta(\tau)\,d\tau}_{\varepsilon(t)} = \varepsilon(t)e^{+\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{b}$$

$\tau = 0$

$$\rightarrow h(t) = \left(\cancel{\varepsilon(t)e^{\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{b}}\right) = c^T\cdot\underline{x} + d\cdot\delta(t) = \varepsilon(t)\cdot\underline{c}^T\cdot e^{\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{b} + d\cdot\delta(t)$$

Rendszerelmélet
5. előadás

1. Jelfolyam hálózatok
2. GV - stabilitás (BIBO)
3. ASZ - stabilitás

1. Jelfolyam hálózatok

Építőelemek - minimálisan szükséges

- összekapcsolás

Gráf - irányított

↳ nyilak - jelterjedés iránya

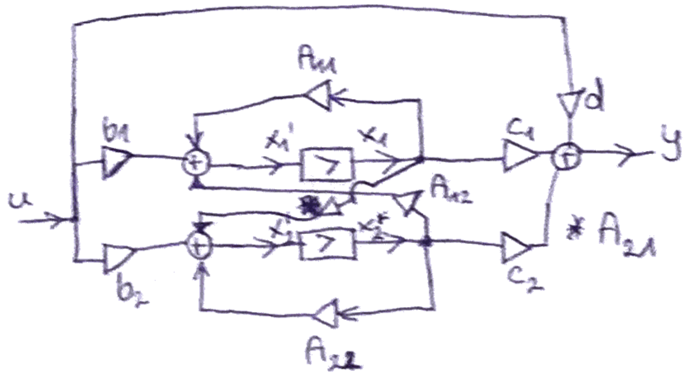
		DI	FI
- Forrás	u → q	$q[k]=u[k]$	$q(t)=u(t)$
- Nyelő	p → y	$y[k]=p[k]$	$y(t)=p(t)$
- Erősítő	p → K → q	$q[k]=Kp[k]$	$q(t)=Kp(t)$
- Késleltető (DI) / - Integrátor (FI)	p → $\boxed{>}$ → q	$q[k]=p[k-1]$ ⇓ $p[k]=q[k+1]$	$q(t)=\int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau$ ⇓ $p(t)=q'(t)$

Állapotváltozós leírás

$$x_1' = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + b_1 \cdot u$$

$$x_2' = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + b_2 \cdot u$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + d \cdot u$$



Stabilitás (LTI)

Külső - belső stabilitás

GV stabilitás — impulzusválasz

ASZ stabilitás - állapotváltozók

GV stabilitás - BIBO stabilitás - bármely korlátos gerjesztésre korlátos válasz

$$\text{GV stabil} \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (\text{DI})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty \quad (\text{FI})$$

ASZ stabilitás - gerjesztés nélküli rendszer $\forall$ állapotváltozója 0-hoz tart tetszőleges kezdőállapot esetén, ha $t \to \infty$, $k \to \infty$.

Ekkor a rendszer válasza: $y = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to 0$.

$$\underline{x}[k] = \underline{\underline{A}}^k \cdot \underline{x}[0] \to 0$$

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{x}(-0) \to 0$$

1) $\underline{\underline{A}}^k = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k \cdot \underline{\underline{L}}_i \Rightarrow \underline{x}[k] = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k \cdot \underline{\underline{L}}_i \cdot \underline{x}[0] \xrightarrow{k\to\infty} \underline{0}$

$\hookrightarrow \boxed{|\lambda_i| < 1}$ ASZ feltétele DI rendszerre

2) $e^{\underline{\underline{A}}t} = \sum_{i=1}^{N} e^{\lambda_i t} \cdot \underline{\underline{L}}_i \Rightarrow e^{\lambda_i t} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \to \lambda_i = \alpha_i + j\beta_i \to \boxed{\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0}$ FI

$e^{\alpha_i t} \cdot e^{j\beta_i t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$$\boxed{\text{ASZ} \Rightarrow \text{GV}}$$

Stabilitás kritériumok (ASZ)

$N=2$: karakt. egy. $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$

$a_1 = -\lambda_1 - \lambda_2$

$a_2 = \lambda_1 \lambda_2$

(FI) $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$

a) λ_1, λ_2 valós

b) $\lambda_1 = \lambda_2^*$

a) $a_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 > 0$

$a_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$

b) $a_1 = -\lambda_1 - \lambda_1^* > 0$

$a_2 = \lambda_1\lambda_1^* = |\lambda_1|^2 > 0$

$a_1 > 0$

$a_2 > 0$

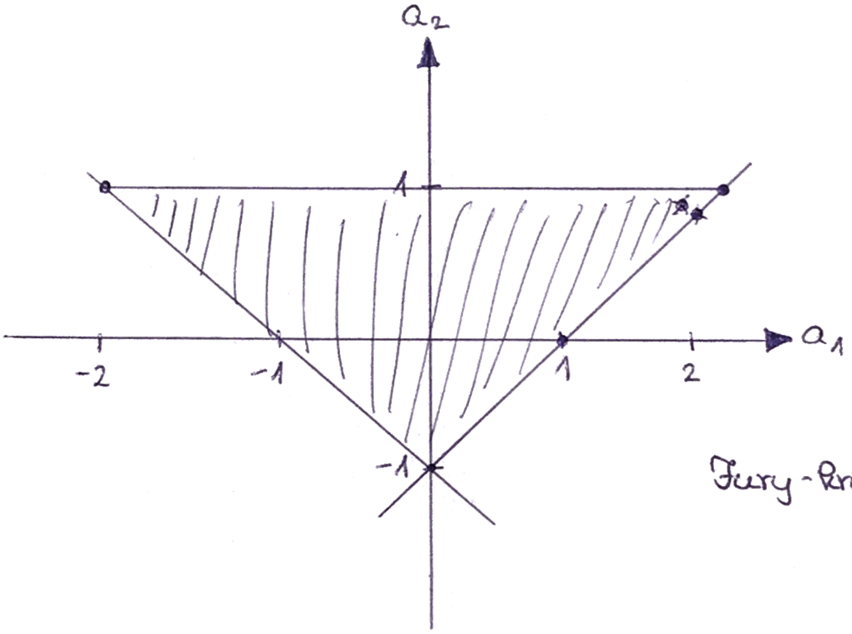
Routh-Hurwitz kritérium

(D1) a) λ_1, λ_2 valós

$$1 + a_1 + a_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = \underbrace{(1-\lambda_1)}\underbrace{(1-\lambda_2)} > 0$$

$$1 - a_1 + a_2 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2) > 0$$

$$-1 < \lambda_1\lambda_2 = a < +1$$



Jury-kritérium

Állapotegyenletek transzformációja

$\underline{z} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{x}$ $\underline{\underline{T}}$ invertálható

$\underline{x} = \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{z} \Rightarrow (\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{z})' = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{z}) + \underline{b} \cdot u$

$$\underline{z}' = \underbrace{\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}}_{\tilde{\underline{\underline{A}}}} \cdot \underline{z} + \underbrace{\underline{\underline{T}} \cdot \underline{b}}_{\tilde{\underline{b}}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\underline{c}^T \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}}_{\tilde{\underline{c}}^T} \cdot \underline{z} + d \cdot u$$

$$\tilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ \emptyset & & \ddots \ \lambda_N \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \underline{x}' = \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{x} + \tilde{\underline{b}} \cdot u \\ y = \tilde{\underline{c}}^T \cdot \underline{x} + d \cdot u \end{array}$$

egyszeres sajátértékek

$$h(t) = \varepsilon(t)\left(\tilde{\underline{b}} \cdot e^{\tilde{\underline{\underline{A}}}t} \cdot \tilde{\underline{c}}^T\right) + d \cdot \delta(t)$$

$$\overset{?}{=} \underline{b} \cdot e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{c}^T$$

$$\underline{c}^T \underline{\underline{T}}^{-1} \left(e^{\underline{\underline{T}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{T}}^{-1}t}\right) \underline{\underline{T}} \cdot \underline{b} = \underline{c}^T \cdot e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{b}$$

$$e^{\underline{\underline{T}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{T}}^{-1}t} = \underline{\underline{E}} + \frac{1}{1!}\underline{\underline{T}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{T}}^{-1}t + \frac{1}{2!}\overbrace{(\underline{\underline{T}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{T}}^{-1}t)^2}^{\underline{\underline{T}}\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{T}}^{-1}} + \ldots \frac{1}{n!}\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}^n\underline{\underline{T}}^{-1}t^n + \ldots$$

Transzformált állapotváltozós reprezentáció GV kapcsolata ekvivalens az eredetive

Rendszerek megfigyelhetősége és irányíthatósága

Megfigyelhető:

$$\text{Ismert}\begin{cases} u(t) & u[k] & \\ y(t) & y[k] & \underline{\underline{A}}, \underline{b}, \underline{c}^T, d \\ t_0 < t < t_1 & 0 < k < k_1 & \end{cases}$$

Keresem

$$\underline{x}(t) \qquad \underline{x}[k]$$

$$\boxed{\underline{x}(-0)} \quad \text{ha} \quad \boxed{\underline{x}[\emptyset]} \longrightarrow \underline{x}[k] = \underline{\underline{A}}^k \cdot \underline{x}[\emptyset] + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{A}}^{k-1-i} \cdot \underline{b} \cdot \underline{u}[i]$$

ki kell találni

$$y[k] = \underline{c}^T \cdot \underline{x}[k] + d \cdot u[k]$$

$$y[k+1] = \underline{c}^T \cdot \underline{x}[k+1] + d \cdot u[k+1] = \underline{c}^T \cdot \left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}[k] + \underline{b} \cdot u[k]\right) + d \cdot u[k+1]$$

$$y[k+2] = \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}[k+1] + \underline{c}^T \cdot \underline{b} \cdot u[k+1] + d \cdot u[k+2] =$$

$$= \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \left(\underline{\underline{A}}\, \underline{x}[k] + \underline{b} \cdot u[k]\right) + \underline{c}^T \cdot \underline{b} \cdot u[k+1] + d \cdot u[k+2] =$$

$$= \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{A}}^2 \cdot \underline{x}[k] + \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} \cdot u[k] + \underline{c}^T \cdot \underline{b} \cdot u[k+1] + d \cdot u[k+2]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y[k] \\ y[k+1] \\ y[k+2] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{y}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{A}} \\ \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{A}}^2 \\ \vdots \\ \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{A}}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{M}}_o \\ \text{(megfigyelhetőségi mx)}}} \underline{x}[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} d & \emptyset & \emptyset \\ \underline{c}^T \cdot \underline{b} & d & \emptyset \\ \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} & \underline{c}^T \cdot \underline{b} & d \\ & & \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u[k] \\ u[k+1] \\ u[k+2] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{u}^*}$$

$$\underline{x}[k] = \underline{\underline{M}}_o^{-1} \left(\underline{y}^* - \underline{\underline{T}} \cdot \underline{u}^*\right)$$

feltétel: $\det(\underline{\underline{M}}_o) \neq 0$

Megfigyelhetőség

$$\underline{\underline{M}}_o = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{\underline{A}} \\ \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^2 \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{N-1} \end{bmatrix}$$

invertálható (FI-DI)

$$FI: \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \underline{\overset{*}{y}}(t) \qquad \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ u''(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \underline{\overset{*}{u}}(t)$$

Irányíthatóság

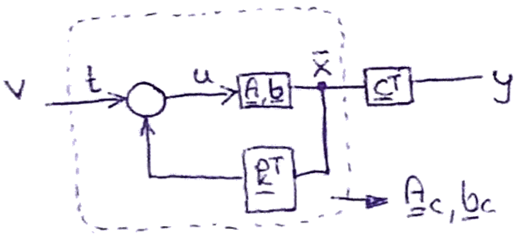
rendszer $\underline{\underline{A}}, \underline{b}, \underline{c}^T, d$ adott; $\underline{x}(t_0)$ kezdeti állapotból $\underline{x}(t_1)$ állapotba juttatható $(t_0 \neq t_1)$ véges idő alatt

$$\underline{\underline{M}}_c = [\underline{b} \;\; \underline{\underline{A}}\cdot\underline{b} \;\; \underline{\underline{A}}^2\cdot\underline{b} \;\; \dots \;\; \underline{\underline{A}}^{N-1}\cdot\underline{b}]$$ - irányíthatósági mátrix

invertálható

Teljes statikus állapot visszacsatolás

Például ASZ stabillá tenni (előírt sajátértékekkel)



$d = 0$

$\underline{k}^T = [k_1 \; k_2 \; \dots \; k_N] = ?$

$$u = v - \underline{k}^T \cdot \underline{x}$$

$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\cdot\underline{x} + \underline{b}\cdot u = \underline{\underline{A}}\cdot\underline{x} + \underline{b}(v - \underline{k}^T\cdot\underline{x}) = \overbrace{(\underline{\underline{A}} - \underline{b}\cdot\underline{k}^T)}^{\underline{\underline{A}}_c}\underline{x} + \overset{b_c}{\underline{b}}v$$

Ackermann féle egyenlet

karakt. egy.

előírom a sajátértékeket, akkor $\underline{k}^T = [0\,0\dots0\,1]\cdot\underline{\underline{M}}_c^{-1}\cdot P_d(\underline{\underline{A}})$

λ_1, λ_2

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = P_d(\overset{\underline{\underline{A}}}{\lambda}) = \underline{\underline{A}}^N + d_{N-1}\underline{\underline{A}}^{N-1} + \dots + d_0\underline{\underline{E}}$$

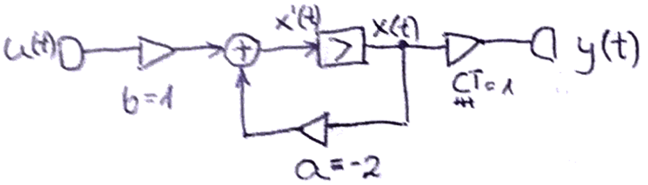
Rendszerelmélet
7. előadás

2017.10.16.

1. ZH konzultáció: 2017.10.18. (szerda)
16:00 – 18:00
E1B

$$\underset{\omega}{2\cdot\cos(3t)}+3\cdot\underset{\omega}{\sin(3t)}=\underset{\sqrt{2^2+3^2}}{A}\cdot\cos(\underset{\omega}{3t}+\underset{-0{,}983\,(\mathrm{rad})}{\varphi})$$

$$h(t)=\varepsilon(t)\cdot e^{-2t}=\varepsilon(t)\cdot \underline{c}^T\cdot e^{\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{b}+d\cdot\delta(t)=\varepsilon(t)\cdot\underset{1}{c^T}\cdot e^{\overset{-2}{a}t}\cdot\underset{1}{b}+\emptyset\cdot\delta(t)$$



$$u(t)=\cos(3t)=U\cdot\cos(3t+\varphi)=\mathrm{Re}\{\underbrace{U\cdot e^{j\varphi}}_{\boxed{\bar{U}\ \text{komplex amplitúdó}}}\cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\overbrace{e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}}^{e^{j(\omega t+\varphi)}}$$

$$u(t)=5\cdot\cos(16t+4)\rightarrow\bar{U}=5\cdot e^{j4}$$

Állapotegyenlet megoldása

$$x'=-2x+u$$
$$y=x$$

$$\rightarrow \mathrm{Re}\{\bar{X}e^{j\omega t}\}'=-2\{\bar{X}\cdot e^{j\omega t}\}+\mathrm{Re}\{\bar{U}e^{j\omega t}\}$$

$$\mathrm{Re}\{j\omega\bar{X}\cdot e^{j\omega t}\}=\mathrm{Re}\{-2\cdot\bar{X}\cdot e^{j\omega t}\}+\mathrm{Re}\{\bar{U}e^{j\omega t}\}$$

$$j\omega\bar{X}\cdot\cancel{e^{j\omega t}}=-2\bar{X}\cdot\cancel{e^{j\omega t}}+\bar{U}\cancel{e^{j\omega t}}$$

$$j\omega\bar{X}=-2\bar{X}+\bar{U}\rightarrow\bar{X}=\frac{\bar{U}}{j\omega+2}$$

$$\bar{Y}=\bar{X}=\underbrace{\left(\frac{1}{j\omega+2}\right)}_{\boxed{\bar{H}\ \text{átviteli tényező}\ \ \bar{H}=H\cdot e^{j\varphi_H}}}\bar{U}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{H}(\omega=3)=\dfrac{1}{2+3j}\\ \bar{U}=1\end{array}\right\}\quad \bar{Y}=\frac{1}{2+3j}\cdot1=\frac{1}{\sqrt{13}\cdot e^{j0{,}983}}=\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot e^{-j0{,}983}$$

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\cos(3t-0{,}983)$$

ez még lehet ZHban!

$$y(t)=\mathrm{Re}\{\bar{Y}\cdot e^{j\omega t}\}$$

Állapotegyenlet:

$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$j\omega \underline{\bar{X}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\bar{X}} + \underline{b} \cdot \bar{U}$$

$$j\omega \underline{\bar{X}} - \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\bar{X}} = (j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) \underline{\bar{X}} = \underline{b} \cdot \bar{U}$$

$$\underline{\bar{X}} = (j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{b} \cdot \bar{U}$$

$$\left(a + bj = \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{j \arctg \frac{b}{a}}\right)$$

$$y = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot u$$

$$\bar{Y} = \underline{c}^T \underline{\bar{X}} + d \cdot \bar{U} = \underline{c}^T \cdot (j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{b} \cdot \bar{U} + d \cdot \bar{U}$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \underline{c}^T \cdot (j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{b} + d$$

DI:

$$u[k] = U \cdot \cos(\vartheta k + \varphi_u) \longrightarrow \bar{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$$

$$x[k] = X \cdot \cos(\vartheta k + \varphi_x) \longrightarrow \bar{X} = X \cdot e^{j\varphi_x}$$

$$x[k+1] = X \cdot \cos(\vartheta(k+1) + \varphi_x) = X \cdot \cos(\vartheta k + (\varphi_x + \vartheta)) \rightarrow \underbrace{X \cdot e^{j\varphi_x}}_{\bar{X}} \cdot e^{j\vartheta} = \bar{X} \cdot e^{j\vartheta}$$

$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}} x + \underline{b} \cdot u \rightarrow e^{j\vartheta} \underline{\bar{X}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\bar{X}} + \underline{b} \cdot \bar{U}$$

$$\bar{H} = \underline{c}^T \cdot (e^{j\vartheta} \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{b} + d$$

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\underline{\underline{M}})}{\det(\underline{\underline{M}})}$$

előjeles minormátrix
determináns, transzp.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T}{(4-6)} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Rendszerelmélet ~~Adatbázisok~~ 2017.10.31.

9. előadás

Seller Rudolf

Jelek és rendszerek a frekvenciatartományban

~~Periódusok~~ Periodikus jelek; Fourier-sor; (FI)

$$x(t) = x(t+\overset{\min}{T}) \quad ; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

állítás: valós $x(t)$-re:

$$\boxed{x(t) = X_0 + \sum_{p=1}^{\infty} X_p \cos(p\Omega t + \xi_p)}$$

Ω - alapharmonikus

$p\Omega$ - p. felharmonikus

Példa: $x(t) = \underset{X_0}{1} + \underset{\substack{(1\text{-es szorzó}) \\ X_1}}{\cos(\Omega t)}$

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \overset{\text{LTI}}{\boxed{H(j\omega)}} \longrightarrow H(j\omega)\cdot e^{j\omega t}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$u_x(t) = U_x \cdot \cos(\omega_x t + \xi_x)$$

$$\downarrow$$

$$\bar{U}_x = U_x \cdot e^{+j\xi_x} \qquad (\omega = \omega_x!)$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} U_p \cos(p\Omega t + \xi_p)$$

$$\downarrow$$

$$\bar{U} = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} U_p \cdot e^{j\xi_p}$$

$$\bar{Y} = \overset{?}{H(j\omega)} \cdot \bar{U} \longrightarrow \bar{Y} = U_0 \cdot H(j0) + \sum_{p=1}^{\infty} U_p e^{j\xi_p} \cdot H(jp\Omega)$$

Definíció:

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^c \cdot e^{+jp\Omega t}$$

komplex

$$X_p^c = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t) e^{-jp\Omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jp\Omega t}\,dt$$

$x(t)$ valós $\Rightarrow X_{-p}^c = \left(X_p^c\right)^*$ - konjugált

Folyomány: $$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^c \cdot e^{+jp\Omega t} = X_0^c \cdot \underbrace{e^{+j\emptyset\Omega t}}_{1} + \sum_{p=1}^{\infty}\left(X_p^c e^{+jp\Omega t} + X_{-p}^c \cdot e^{-jp\Omega t}\right) =$$

$$X_p^c = |X_p^c| \cdot e^{j\xi_p}$$
$$(X_p^c)^* = |X_p^c| \cdot e^{-j\xi_p}$$

$$= X_0^c + \sum_{p=1}^{\infty} 2 \cdot |X_p^c| \cdot \frac{e^{+jp\Omega t} \cdot e^{+j\xi_p} + e^{-jp\Omega t} \cdot e^{-j\xi_p}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = X_0 + \sum_{p=1}^{\infty} X_p \cdot \cos(p\Omega t + \xi_p)} \quad X_0 = X_0^c\,;\ X_p = 2|X_p^c|,\ \xi_p = \text{arc}\, X_p^c$$

valós

Páros $x(t)$
$x(t) = x(-t) \Leftrightarrow X_p^c$ - tisztán valós : $X_p = 2X_p^c$

Páratlan $x(t)$
$x(t) = -x(-t) \Leftrightarrow X_p^c$ tisztán képzetes : $X_p = 2jX_p^c$

Parseval-tétel

$$P_{avg} = \frac{1}{T} \cdot \int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2\,dt \qquad P_{avg} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} |X_p^c|^2$$

$10 + 41 + ZH2 > 97$: 5
ZH2 > 46 – HF2-3 nélkül

DI:

$$x[k] = x[k+L] \quad \text{(}L\text{: min.)} \qquad \Theta = \frac{2\pi}{L}$$

Definíció:

$$\boxed{x[k] = \sum_{p=\langle L\rangle} X_p^c \cdot e^{+jp\Theta k} \qquad X_p^c = \frac{1}{L}\sum_{k=\langle L\rangle} x[k]\cdot e^{-jp\Theta k}}$$

Mérnöki alak:

$$x[k] \text{ valós} \Longrightarrow X_{-p}^c = \left(X_p^c\right)^*$$

$$x[k] = \sum_{p=\langle L\rangle} X_p^c \cdot e^{+jp\Theta k}$$

$$M_o = \frac{L-1}{2}$$

L páratlan: $x[k] = X_0^c + \sum_{p=1}^{M_o}\left(X_p^c \cdot e^{+jp\Theta k} + X_{-p}^c \cdot e^{-jp\Theta k}\right) = \ldots =$

$$\left\{X_p^c = |X_p^c| e^{j\xi_p},\ X_{-p}^c = |X_p^c|\cdot e^{-j\xi_p}\right\}$$

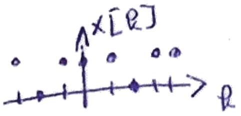
$$\boxed{= X_0^c + \sum_{p=1}^{M_o} X_p \cos(p\Theta k + \xi_p)} \qquad X_0 = X_0^c;\quad X_p = 2|X_p^c|;\quad \xi_p = \text{arc}\, X_p^c$$

L páros: $M_e = \frac{L}{2} - 1$

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{M_e} X_p \cos(p\Theta k + \xi_p) + \underbrace{X_{\frac{L}{2}}^c \cdot e^{j\frac{L}{2}\Theta k}}_{= X_{\frac{L}{2}}^c \cdot \underbrace{e^{j\pi k}}_{(-1)^k}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{M_e} X_p \cos(p\Theta k + \xi_p) + X_{\frac{L}{2}}(-1)^k} \qquad X_0 = X_0^c,\ X_p = 2|X_p^c|;\ \xi_p = \text{arc}\, X_p^c;$$

$$X_{\frac{L}{2}} = X_{\frac{L}{2}}^c$$



Példa:

$L = 4;\ \Theta = \frac{2\pi}{L} = \frac{\pi}{2};\ M_e = \frac{L}{2} - 1 = 1$

$x[k] = X_0 + X_1\cos\left(\frac{\pi}{2}k + \xi_1\right) + X_2(-1)^k$

$$X_0 = X_0^c = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} x[k]e^{-j\overset{0}{p}\Theta k} = \frac{1}{4}(1+1+0+1) = \frac{3}{4}$$

$$X_1^c = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} x[k]e^{-j\frac{\pi}{2}k} = \frac{1}{4}\Big(1 + \underbrace{1\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} + 0e^{-j2\frac{\pi}{2}} + \underbrace{e^{-j3\frac{\pi}{2}}}_{j}\Big)$$

$$X_2^c = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} x[k](-1)^k = \frac{1}{4}(1 - 1 + 0 - 1) = -\frac{1}{4}$$

$$x[k] = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{1}{4}(-1)^k$$

2017.11.06.

Rendszerelmélet

10. heti előadás

Fourier-transzformáció

FI:
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

$X(j\omega)$ - spektrum

Elégséges feltétel a spektrum létezésére: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt < \infty$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g^*(t) dt \Rightarrow X(j\omega) = \langle x(t), e^{+j\omega t} \rangle$$

Példa:

$$x(t) = 1$$

$$X(j\omega) = A\delta(\omega)$$

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A \underbrace{\delta(\omega) e^{+j\omega t}}_{1} d\omega = \frac{A}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$$

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

Tulajdonságok:

$x(t)$ valós $\Leftrightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

$x(t)$ valós és páros $\Rightarrow X(j\omega)$ tisztán valós

$x(t)$ valós és páratlan $\Rightarrow X(j\omega)$ tisztán képzetes

Eltolási-tétel

$$x(t-\Delta t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)e^{-j\omega\Delta t}$$

Modulációs tétel

$$x(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X\left(j(\omega-\omega_0)\right)$$

Példa.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \underset{\substack{\uparrow \\ 2\pi\delta(\omega)}}{1}\cdot e^{j\omega_0 t} \Rightarrow X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Konvolúciós-tétel

$x_1(t)$, $x_2(t)$ abszolút integrálhatóak

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(j\omega)\cdot X_2(j\omega)$$

Derivált-tétel

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \underline{c}^T(j\omega\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})^{-1}\underline{B} + D$$

DI:

$$X(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\vartheta k}$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) \cdot e^{+j\vartheta k} d\vartheta$$

Tulajdonságok:

$x[k]$ valós $\Longleftrightarrow$ $X(e^{-j\vartheta}) = X^*(e^{j\vartheta})$

$x[k]$ valós és páros $\Longleftrightarrow$ $X(e^{j\vartheta})$ tisztán valós

$x[k]$ valós és páratlan $\Longleftrightarrow$ $X(e^{j\vartheta})$ tisztán képzetes

Eltolási tétel:

$$x[k-i] \longleftrightarrow X(e^{j\vartheta}) \cdot e^{-j\vartheta i}$$

Konvolúció: $x_1[k]$, $x_2[k]$ abszolút összegezhetőek

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1[i] \cdot x_2[k-i] e^{-j\vartheta} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1[i] \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2[k-i] e^{-j\vartheta k}}_{X_2(e^{j\vartheta}) e^{-j\vartheta i}} = X_2(e^{j\vartheta}) \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1[i] e^{-j\vartheta i}}_{X_1(e^{j\vartheta})}$$

$$x_1[k] * x_2[k]$$

$$X_1(e^{j\vartheta}) \cdot X_2(e^{j\vartheta})$$

Laplace:

Komplex gyökpárok esete

$$X(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{n-1})(s-p_{n-1}^*)}=\frac{c_1}{s-p_1}+\frac{c_2}{s-p_2}+\dots+\frac{c_{n-1}}{s-p_{n-1}}+\frac{c_{n-1}^*}{s-p_{n-1}^*}$$

$x(t)$ - jel valós $\Longleftrightarrow$ $p_n=p_{n-1}^*$

$c_n=c_{n-1}^*$

$$\Rightarrow \varepsilon(t)\left(c_1e^{+p_1t}+c_2e^{+p_2t}+\dots+\underbrace{c_{n-1}e^{+p_{n-1}t}+c_{n-1}^*e^{+p_{n-1}^*t}}\right.$$

$$c_{n-1}=|c_{n-1}|\cdot e^{j\Phi}=|c|e^{j\Phi}$$

$$p_{n-1}=\alpha+j\omega_0$$

$$|c|e^{\alpha t}\cdot e^{j\omega_0 t}\cdot e^{j\Phi}+|c|e^{\alpha t}e^{-j\omega_0 t}e^{-j\Phi}=$$

$$=2\cdot|c|e^{\alpha t}\frac{e^{j(\omega_0t+\Phi)}+e^{-j(\omega_0t+\Phi)}}{2}=2\cdot|c|\cdot e^{\alpha t}\cos(\omega_0t+\Phi)$$

Példa:

$$X(s)=\frac{1}{s^2+8s+25}\qquad p_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-100}}{2}=\frac{-8\pm 6j}{2}\begin{matrix}\nearrow -4+3j\\ \searrow -4-3j\end{matrix}$$

$$p=\alpha+j\omega_0\Rightarrow\alpha=-4\quad\omega_0=3$$

$$\frac{1}{s^2+8s+25}=\frac{1}{(s-(-4+3j))(s-(-4-3j))}$$

$$c_{(1)}=\frac{1}{s-(-4-3j)}\Bigg|_{s=-4+3j}=\frac{1}{-4+3j+4+3j}=\frac{1}{6j}=-\frac{1}{6}j$$

$$c=\frac{1}{6}e^{-j\frac{\pi}{2}}\quad |c|=\frac{1}{6}\quad \Phi=-\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \underbrace{2\cdot\frac{1}{6}}_{\frac{1}{3}} e^{-4t} \underbrace{\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)}_{\sin(3t)}$$

Z-transzformáció (DI Laplace)

$$X(z) = \sum_{k=\emptyset}^{\infty} x[k]\cdot z^{-k}$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r_1} X(z)\cdot z^{+k-1} dz$$

$$FI \to DI : \; x(t) \to x(kT) = x[k]$$

Shannon mintavételi tétel

$$f_{sampling} > 2 f_{max}$$

$$e^{j\omega t} \to e^{j\omega Tk} = e^{j\vartheta k}$$

$$\omega T = \vartheta$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$e^{st} \to e^{sTk} = e^{\sigma Tk} \cdot e^{j\omega Tk}$$

$$e^{sTk} = r^k \cdot e^{j\vartheta k}$$

$$t = r\cdot e^{j\vartheta}$$

$$X(z) = \sum_{k=\emptyset}^{\infty} x[k]\cdot z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon[k]\cdot x[k] \left(\frac{1}{r}\right)^k e^{-j\vartheta k} = \mathcal{F}\left\{\varepsilon[k]\left(\frac{1}{r}\right)^k x[k]\right\}$$

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{\varepsilon(t) e^{\alpha t} x(t)\right\}$$

$$DI\text{-}\mathcal{F}: \; X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon[k]\, x[k]\, e^{-j\vartheta k}$$

$\frac{1}{r}; r=1$

$$X(e^{j\vartheta}) = X(z)$$

Tételek: Eltolási-tétel

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k-i]x[k-i]\} = X(z)\cdot z^{-i} \qquad H(z) = z^{-1}$$

Modulációs-tétel:

$$x[k]\cdot q^{k} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(\frac{z}{q}\right)$$

Konvolúciós-tétel:

$$x_1[k] \circledast x_2[k] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)\cdot X_2(z)$$

x_1, x_2 belépő jelek

$$\left(\cancel{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \ldots [i}\right)$$

Inverz $\mathcal{Z}$-transzformáció

$$\frac{z}{z-p} \longleftrightarrow \varepsilon[k]p^{k}$$

$$X(z) = \underbrace{\frac{N(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)}}_{\text{valódi racionális tört fv.}}\cdot z$$

Egyszeres pólusok:

$$X(z) = \frac{3z^2-2{,}6z}{z^2-1{,}6z+0{,}6} = z\cdot\frac{3z-2{,}6}{z^2-1{,}6z+0{,}6} = z\,\frac{3z-2{,}6}{(z-1)(z-0{,}6)} = z\left(\frac{\overset{1}{C_1}}{z-1} + \frac{\overset{2}{C_2}}{z-0{,}6}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x[k] = \varepsilon[k]\left(1+2\cdot 0{,}6^{k}\right)$$

Kétszeres pólusok

$$z\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})^2} = z\left(\frac{C_1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{C_2}{(z-\frac{1}{4})^2} + \frac{D_3}{z-\frac{1}{4}}\right)$$

$$C_1 = \frac{1}{\cancel{(z-\frac{1}{2})}(z-\frac{1}{4})^2}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16$$

$$C_2 = \frac{1}{(z-\frac{1}{2})\cancel{(z-\frac{1}{4})^2}}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}} = -4$$

$$\Rightarrow \underbrace{z\left(16\frac{1}{z-\frac{1}{2}} - 4\frac{1}{(z-\frac{1}{4})^2} + \frac{D_3}{z-\frac{1}{4}}\right)}_{=} \qquad = -32 - 4\cdot 16 + \frac{D_3}{\frac{1}{4}}$$

$z = \varnothing$

$$\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -32$$

$$-32 = -32 - 64 + 4D_3$$

$$D_3 = 16$$

$$\Rightarrow x[k] = \varepsilon[k]\left(16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k - 4k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + 16\left(\frac{1}{4}\right)^k\right)$$

Komplex póluspár: $X(z) = z\left(\frac{c}{z-p} + \frac{c^*}{z-p^*}\right)$

$$x[k] = \varepsilon[k]\left(c\cdot p^k + c^*(p^*)^k\right) = \varepsilon[k]\left(|c|\cdot e^{j\Phi} q^k e^{j\vartheta_0 k} + |c|\cdot e^{-j\Phi} q^k e^{-j\vartheta_0 k}\right.$$

$c = |c|\cdot e^{j\Phi}$

$p = q\cdot e^{j\vartheta_0}$

$$= \varepsilon[k]\cdot 2\cdot|c|\cdot q^k\cdot\cos(\vartheta_0 k + \Phi)$$

Rendszerelmélet
14. Heti előadás

2017.12.04

Moduláció

Miért?

Csatorna megosztás

- TDMA
- FDMA
- CDMA

Analóg (FI) moduláció

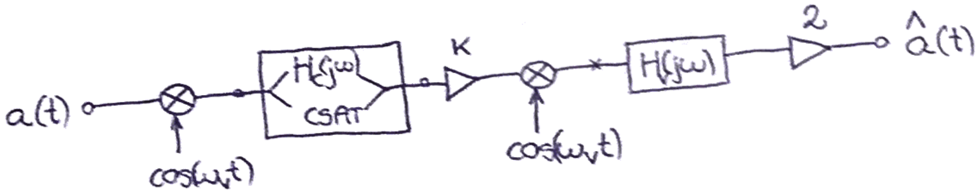
$s(t) = a(t) \cdot \cos[\omega_v t + \varphi(t)]$, $s_m(t)$

AM — szög: PM, FM

AM

$s(t) = a(t)\cos(\omega_v t)$

$s_m(t) \rightarrow a(t) \rightarrow s_m(t)$



csatorna: $H(j\omega) = \frac{1}{K} e^{-j\omega \Delta t}$

$\Delta t = \varnothing$

$a(t)\cos(\omega_v t) \cdot \cos(\omega_v t) = \frac{1}{2} a(t) + \frac{1}{2} a(t)\cos(2\omega_v t)$

AM típusok

AM-DSB

$a(t) = u_v + s_m(t)$

$s_{DSB}(t) = u_v \cos(\omega_v t) + s_m(t)\cos(\omega_v t)$

$s_m(t) = u_m \cdot \cos(\omega_m t)$

$s_{DSB}(t) = u_v \cdot \cos(\omega_v t) + \frac{1}{2} u_m \cos((\omega_v - \omega_m)t) + \frac{1}{2} u_m \cos((\omega_v + \omega_m)t)$

AM-DSB/SC

AM-SSB/(SC)

ZH felkészülés

1. $H(s)=\frac{1}{s+2}$; $h(t)=?$

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

2. $x(t)$ valós, periodikus, páratlan

$X_0=X_0^c=?=\varnothing$

$x(t)=X_0+\sum_{p=1}^{\infty}X_p\cos(p\Omega t+\xi_p)$

3. DI/FI - nagy feladat

$u[k]$ $\underbrace{u[0]=1 \quad u[1]=1 \quad u[2]=0 \quad u[3]=0,}$ $u[4]=1 \quad u[5]=1 \ldots$

$\hookrightarrow U_0+\sum_{p=1}^{M}U_p\cos(p\Theta k+\xi_p)$

$H(z)\rightarrow y[k]$

$H(z)$ stabilitás

$\Rightarrow H(e^{j\vartheta})$

$y[k]=U_0\cdot H(e^{j\vartheta})\big|_{\vartheta=0}+\sum_{p=1}^{M}U_p\left|H(e^{j\vartheta})\right|\Big|_{\vartheta=p\Theta}\cdot\cos(p\Theta k+\xi_p)$

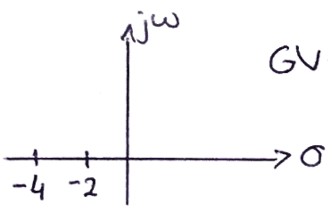
$\xi_p=\mathrm{arc}\{H(e^{j\vartheta})|_{\vartheta=p\Theta}\}$

4. $H(s)=\frac{s^2+8s+14}{s^2+6s+8}$

a) Stabilitás: $\mathrm{Re}\{p_i\}<0$

$s^2+6s+8=0$

$\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}$ $\nearrow p_1=-2$, $\searrow p_2=-4$

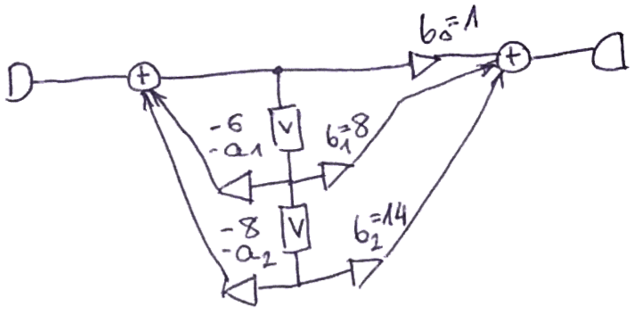


GV-stabilis

b) $H(j\omega)$ létezik, mert GV stabil

$s \rightarrow j\omega$ $\quad H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2+8(j\omega)+14}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}$

c)



$H(s)=\frac{b_0s^2+b_1s+b_2}{1s^2+a_1s+a_2}$

a_0

d) A felrajzolt rendszer stabilitása

ASZ stabilis

e) $R(t) = ?$

$$\frac{s^2+8s+14}{s^2+6s+8} = \frac{s^2+6s+8+2s+6}{s^2+6s+8} = 1 + \frac{2s+6}{\underset{(s+2)(s+4)}{s^2+6s+8}} = 1 + \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4}$$

$A = 1 \quad B = 1$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+4} \Rightarrow R(t) = \delta(t) + \varepsilon(t) e^{-2t} + \varepsilon(t) e^{-4t}$$

f) $y(\infty) = ? \quad u(t) = \varepsilon(t) \quad \frac{1}{s}$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \underbrace{Y(s)}_{H(s)\frac{1}{\cancel{s}}} = \lim_{s \to 0} H(s) = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$Y(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot H(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} H(s) = \frac{14}{8}$$

$y[\infty]$

$$H(z) = \frac{7{,}5z^2 - 6z + 1{,}5}{z^2 - 0{,}3z - 0{,}4} = \frac{7{,}5(z^2 - 0{,}3z - 0{,}4) + (-3{,}75)z + 4{,}5}{z^2 - 0{,}3z - 0{,}4} =$$

$$= 7{,}5 + \frac{-3{,}75z + 4{,}5}{(z+0{,}5)(z-0{,}8)} = 7{,}5 + \frac{A}{z+0{,}5} + \frac{B}{z-0{,}8} =$$

$A = -4{,}9038$

$B = 1{,}5385$

$$= 7{,}5 + \left(\frac{-4{,}9038z}{z+0{,}5} + \frac{1{,}5385z}{z-0{,}8}\right) z^{-1} = 7{,}5\delta[k] - 4{,}9038 \cdot \varepsilon[k-1] \cdot (-0{,}5)^{k-1}$$

$$+ 1{,}5385 \cdot \varepsilon[k-1] \cdot (0{,}8)^{k-1}$$